

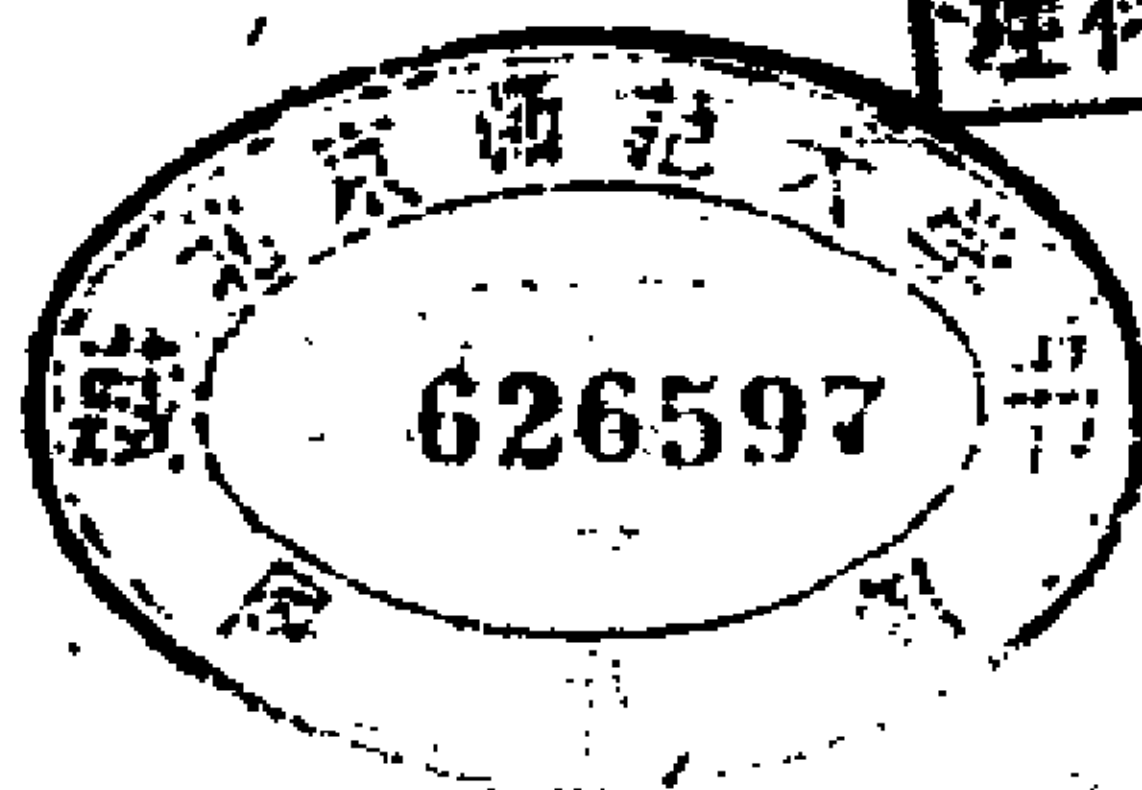
J01/189/11

数学小丛书

(13)

复数与几何

常庚哲 伍润生



北京市数学会编

人民教育出版社

1954年·北京

这本小册子通过许多的例子,说明了复数在平面上的几何学中的一些方便的、有趣的应用。第一节“复平面”简单复习关于复数的基本知识。第二节“一些例子”列举了复数应用于几何学的一些一般性的例子。以下三、四、五、六节分别说明复数在“共线、共圆、共点”,“圆族”,“复数的分式线性变换”,“等速圆周运动”等方面的应用。在说明这些应用的同时,介绍了一些数学上常用的思考方法。小册子中还附有习题和题解,提供练习的机会。

复数与几何

常庚哲 伍海星

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

天水新华印刷厂印装

统一书号: 13012·0250 字数: 43 千

开本: 787×1092 毫米 $1/32$ 印张: $2\frac{3}{8}$

1964 年 9 月第一版

1979 年 1 月第 3 次印刷

印数: 101,001—404,000 册

定价 0.20 元

編者的話

数学課外讀物对于帮助学生学好数学，扩大他們的数学知識領域，是很有好处的。近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生閱讀的通俗数学讀物。我們約請一些数学工作者，編写了这套“数学小丛书”，陸續分册出版，来适应这个要求。

这套书打算介紹一些課外的数学知識，以扩大学生的知識領域，加强对数学基础知識的掌握，引导学生独立思考，理論联系实际。

这是我們的初步想法和尝试，热切地希望数学工作者和讀者對我們的工作提出宝贵的意見和建議，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学課外讀物。

北京市数学会

1962年4月

引 言

从中学代数教科书中，讀者已經学习过复数的基本概念和运算。但是在那里学到的主要是复数的代数性质，例如：为了解决在实数范圍內不可能解出的方程 $x^2+1=0$ 而引入了虛单位 i ，后来又利用复数开出 1 的 n 次方根等等。讀者可曾想到，正是在代数上起着重要作用的复数，它在平面上的几何学中也能找到应用？这本小册子的目的就是通过許許多多的例子来显示出复数在几何上的应用。

我們假定讀者对于复数的定义和它的代数运算已經熟悉。但是，为了便于大家回忆，还是在第一节中簡略地复述一下复数的基本知識。

我們希望讀者尽可能地多做每节之后所附的习题，这对于掌握該节所介紹的方法大有好处。

目 次

引言

一 复平面	1
二 一些例子	9
三 共线、共圆、共点	19
四 圆族	36
五 分式线性变换	44
六 等速圆周运动	62
习题解答与提示	65

— 复平面

每个复数 z 都具有 $x+iy$ 的形式, 其中 x 和 y 都是实数, 分别称为 z 的实部和虚部, 记成 $x=R(z)$, $y=I(z)$. i 称为虚单位, 适合 $i^2=-1$. 两个复数 z 与 z' 当且只当 $R(z)=R(z')$, $I(z)=I(z')$ 时才成立着 $z=z'$.

我們可以在平面上表示复数. 在平面上取定一直角坐标系 OXY . 对于复数 $z=x+iy$, 我們用平面上具有横坐标 $x=R(z)$ 与纵坐标 $y=I(z)$ 的点 $(x, y) = (R(z), I(z))$ 来表示 (图 1.1); 反之, 若给出平面上一点 (x, y) , 我們取复数 $x+iy$ 与这个点对应. 这样, 就建立了平面上所有的点和一切复数

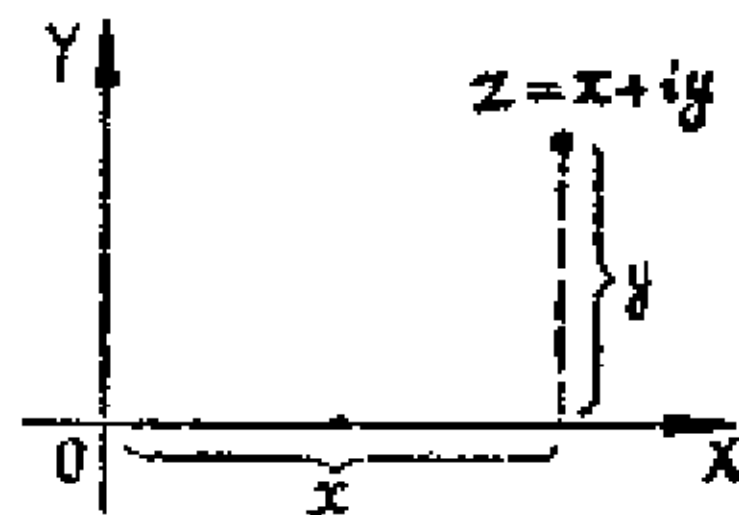


图 1.1

之間的一个一一对应. 正因为如此, 我們就把复数和平面上的点完全等同起来, 以后把具有坐标 $(R(z), I(z))$ 的那点就用复数 z 来表示, 說成点 z . 这样, 平面上的每一点 z 都与一个确定的复数对应着, 这个平面, 就称之为复平面, OX 轴称为实轴, OY 轴称为虚轴, O 称为原点, 它用复数 0 表示.

我們还可以把复数看成平面向量, 所謂向量, 是指既有方向又有长短的量. 給出一复数 z , 以原点 O 为起点, 以点 z 为終点, 可以連成一条有方向的綫段, 这就是一个向量, 用 \overrightarrow{Oz} 表示. 反之, 画出一个由 O 点起的向量, 它的終点便唯一地确定了一个复数. 这样看来, 平面上所有从原点出发的向量与一

切复数之間也有了一个一一对应 正因为如此, 我們就可以把平面上的向量和复数完全等同起来. 今后就用复数 z 来表

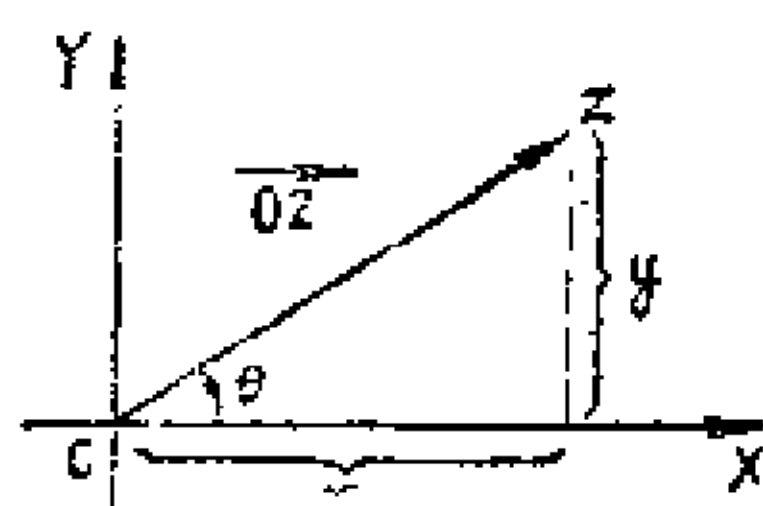


图 1.2

示向量 \vec{Oz} , 并且約定可以写成

$$z = \vec{Oz}.$$

向量 \vec{Oz} 的长度用記号 $|\vec{Oz}|$ 表示. 令

$\rho = |\vec{Oz}|$, 由图 1.2 可以看出

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

这个公式解决了向量长度的計算. 那么如何表示出向量的方向呢? 显然可以用 \vec{Oz} 与实軸正方向之間的夹角 θ 来表示, 不过, 我們要規定 θ 的正負号. 当 z 在包括实軸在內的上半平面时, θ 取非負值并滿足 $0 \leq \theta \leq \pi$; 当 z 在不包括实軸在內的下半平面时, θ 取負值, 并且适合 $-\pi < \theta < 0$. 只有 $z=0$ 是例外, 这时无法規定 θ 的值. 事实上这时向量 \vec{Oz} 縮成了一个点, 它的长度为零, 当然談不到有什么确定的方向, 这种向量称为零向量.

仍由图 1.2 可見

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

利用这个公式, 对于任意异于零的复数 $z = x + iy$ 都可表成如下的形式

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta).$$

为簡便起見, 我們把 $\cos \theta + i \sin \theta$ 用一个記号 $e^{i\theta}$ 来記, 亦即置

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

于是就有

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

这个表达式，很明显地指出了复数的向量性质： ρ 表长短， $e^{i\theta}$ 管方向，它們各司各职，而复数 z 作为它們的乘积，就是一个既有长短又有方向的量——亦即为一向量了。

我們令 $|z| = \rho$ ，称为 z 的模，滿足条件 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的 θ 称为 z 的幅角，記成 $\theta = \arg z$ 。

例

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$-1 = e^{i\pi},$$

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

讀者已經知道，若 $z_1 = x_1 + iy_1$ ， $z_2 = x_2 + iy_2$ ，則 $z_1 + z_2$ 是指复数

$$(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

我們来看看，这种加法运算具有什么样的几何解釋。

以 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2 。

由图 1.3 可見

$$R(z) = x_1 + x_2 = R(z_1 + z_2),$$

$$I(z) = y_1 + y_2 = I(z_1 + z_2).$$

由复数相等的定义可知

$$z = z_1 + z_2.$$

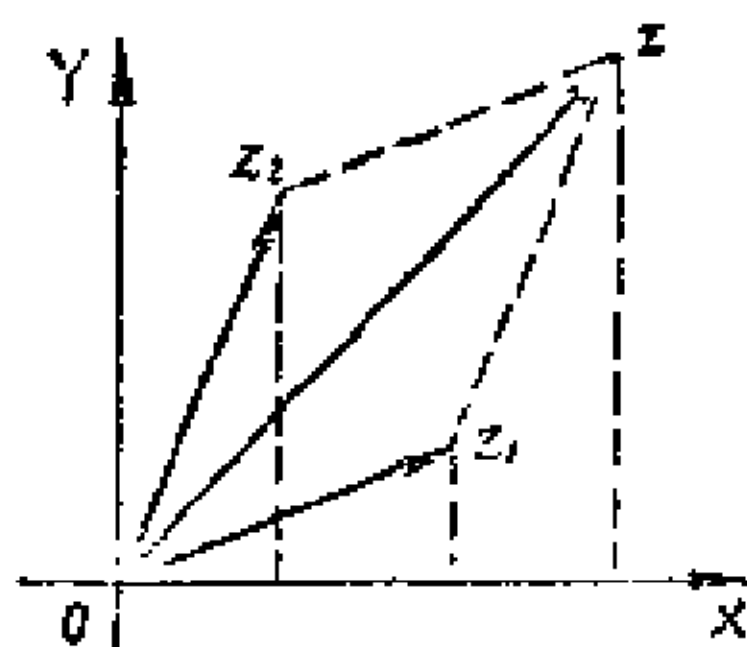


图 1.3

我們也可以將此公式改寫為

$$\overrightarrow{Oz} = \overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_2},$$

這正是向量加法的平行四邊形規則。

前面已經說過，一個向量的要素只有兩個，即長短和方向，至於其它的一切東西，例如起點的位置，都是無關緊要的。如果有兩個向量，它們的長短和方向相同，我們就說這兩個向

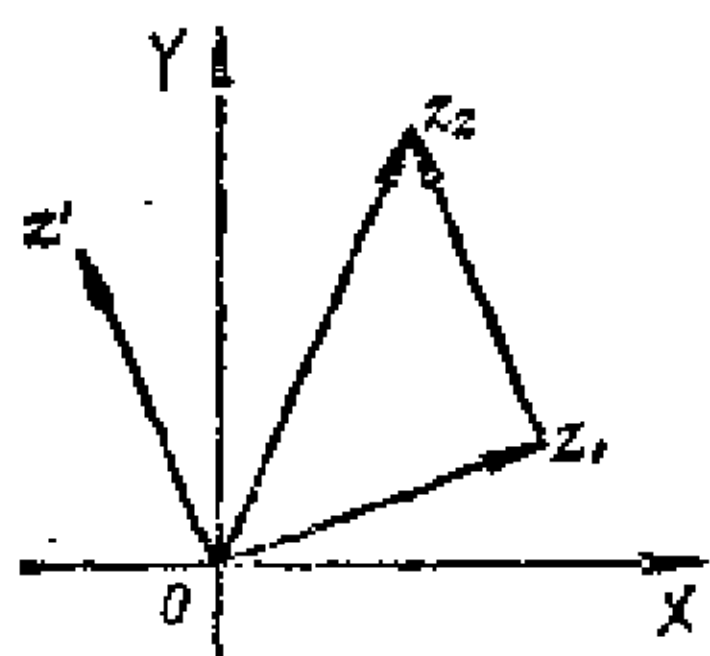


圖 1.4

量是相等的。於是我們就可以考慮起點不在原點的向量，比如起點是 z_1 終點是 z_2 的向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ (圖 1.4)，將它的起點搬到原點去而不改變它的方向，就得到另一向量 $\overrightarrow{Oz'}$ ，根據向量相等的意思，應當有

$$\overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz'}.$$

但是由向量加法的定義，又有

$$\overrightarrow{Oz'} + \overrightarrow{Oz_1} = \overrightarrow{Oz_2}.$$

從而

$$\overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{Oz'} = \overrightarrow{Oz_2} - \overrightarrow{Oz_1} = z_2 - z_1.$$

這就是說，起點在 z_1 終點在 z_2 的向量，如果把它平行地移動

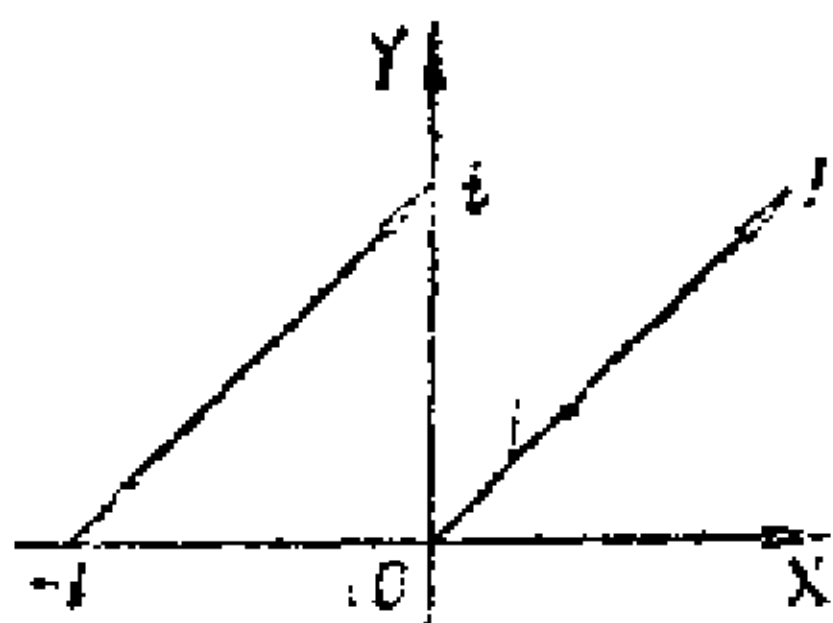


圖 1.5

使起點落到原點，那麼這個向量就可以用複數 $z_2 - z_1$ 表示。這個看法請讀者務必搞清楚，因為在這本小冊子中一再地利用了這個事實。例如起點在 -1 終點在 i 的那個向量可用 $i - (-1) = 1 + i$

来表示 (图 1.5)。

現在再来复习复数的乘法, 設

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}, \quad z = \rho e^{i\theta}.$$

所以

$$\begin{aligned} z_0 z &= (\rho_0 e^{i\theta_0}) (\rho e^{i\theta}) \\ &= \rho_0 \rho (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \rho_0 \rho [(\cos \theta_0 \cos \theta - \sin \theta_0 \sin \theta) \\ &\quad + i(\sin \theta_0 \cos \theta + \cos \theta_0 \sin \theta)] \\ &= \rho_0 \rho [\cos(\theta_0 + \theta) + i \sin(\theta_0 + \theta)] \\ &= \rho_0 \rho e^{i(\theta_0 + \theta)}. \end{aligned}$$

我們不对这个公式作一般的几何解釋, 只注意它的两个重要的特殊情况。

1) 当 $\rho = |z| = 1$ 时, $z = e^{i\theta}$, 于是

$$zz_0 = e^{i\theta} z_0 = \rho_0 e^{i(\theta_0 + \theta)} = |z_0| e^{i(\theta_0 + \theta)}.$$

这表明, 用 $e^{i\theta}$ 去乘任一个复数 z_0 , 并不改变 z_0 的模, 但是使 z_0 的幅角增加了 θ . 从几何上来看, 用 $e^{i\theta}$ “作用” (乘) 到向量 z_0 上去, 得到了一个与 z_0 长短相同的向量, 它的方向是由 z_0 的方向轉动一个角度 θ 而得到. 这里須加一点說明, 由于 θ 可正可負, 当 $\theta > 0$ 时, 把 z_0 沿反时針方向轉动 θ 就得到了向量 $z_0 e^{i\theta}$; 若 $\theta < 0$ 时, 把 z_0 沿順时針方向轉动 $-\theta$ 才得到向量 $z_0 e^{i\theta}$. 特別, 因为

$$iz_0 = e^{i\frac{\pi}{2}} z_0, \quad -iz_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_0,$$

可知向量 iz_0 和 $-iz_0$ 是把 z_0 分別沿反时針方向和順时針方向轉一直角而得. 由 $-z_0 = (-1)z_0 = e^{i\pi} z_0$, 可知 $-z_0$ 的方

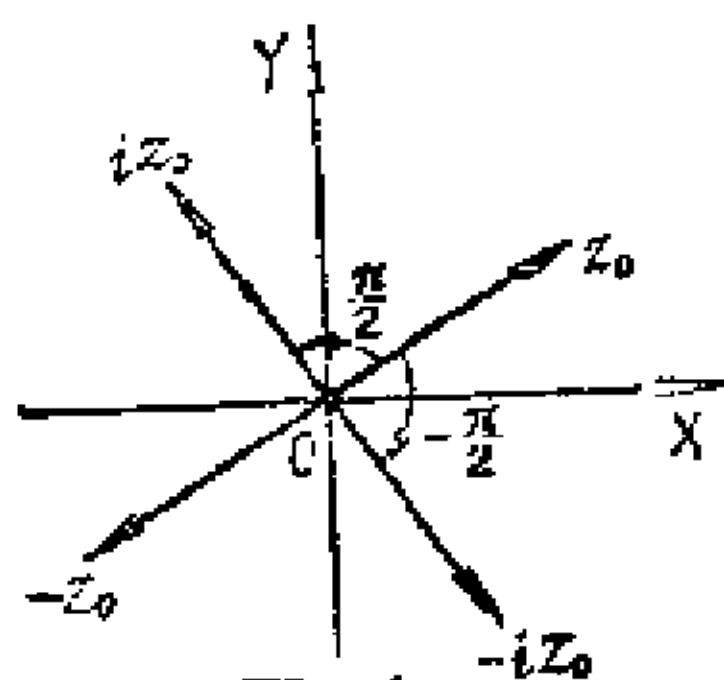


图 1.6

向正好和 z_0 的方向相反, 这两个向量互为逆向量(图 1.6).

2) 当 $\theta=0$ 时, $z=\rho>0$, 即此时 z 为一正实数, 因此

$$zz_0 = \rho z_0 = (\rho \rho_0) e^{i\theta_0}.$$

这表明, 用正实数 ρ 去乘复数 z_0 , 不改变 z_0 的幅角, 只使它的模乘上了 ρ 倍. 从几何上来看, 用正实数 ρ “作用”(乘)到向量 z_0 上去, 并不改变 z_0 的方向, 只是使 z_0 的长短“拉长”(当 $\rho<1$ 时实际上是缩短)了 ρ 倍. 根

据这点说明, 特别的, 由图 1.7 可

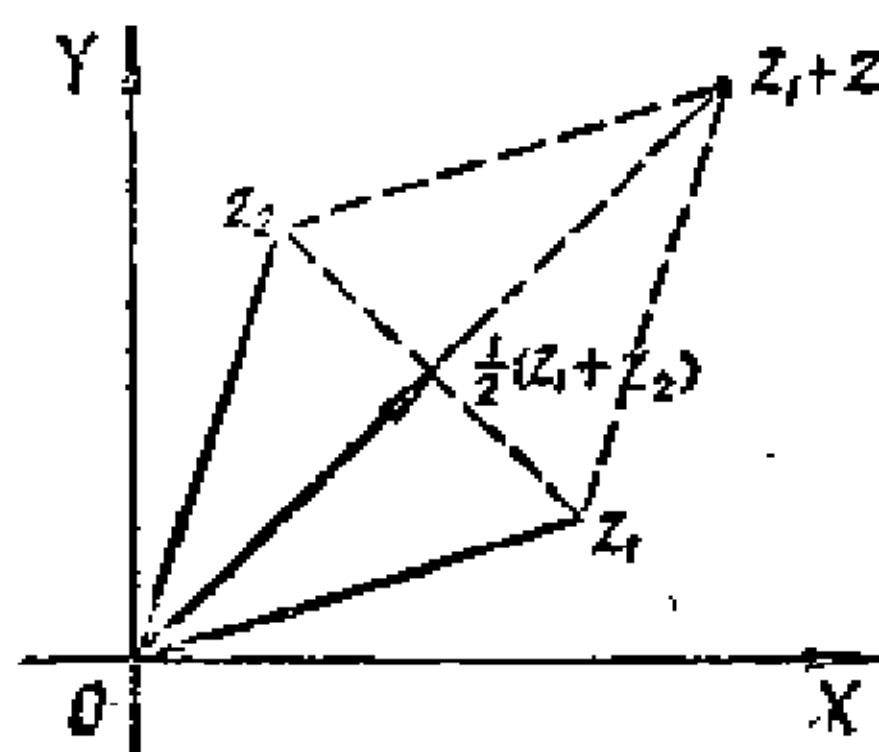


图 1.7

见, z_1 与 z_2 连线的中点可以用复数 $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ 来表示.

由于乘法的公式已经得到, 于是对于

$$z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

有

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}.$$

对于这个公式应当特别理解的是 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ 表示着由向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 转到 $\overrightarrow{Oz_2}$ 所扫过的有向角度——即带有一定正负号的角度, 如果 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) > 0$, 表示这转动的角度是沿反时针方向(图 1.8). 如果 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) < 0$, 表示是沿顺时针方向转动的角度

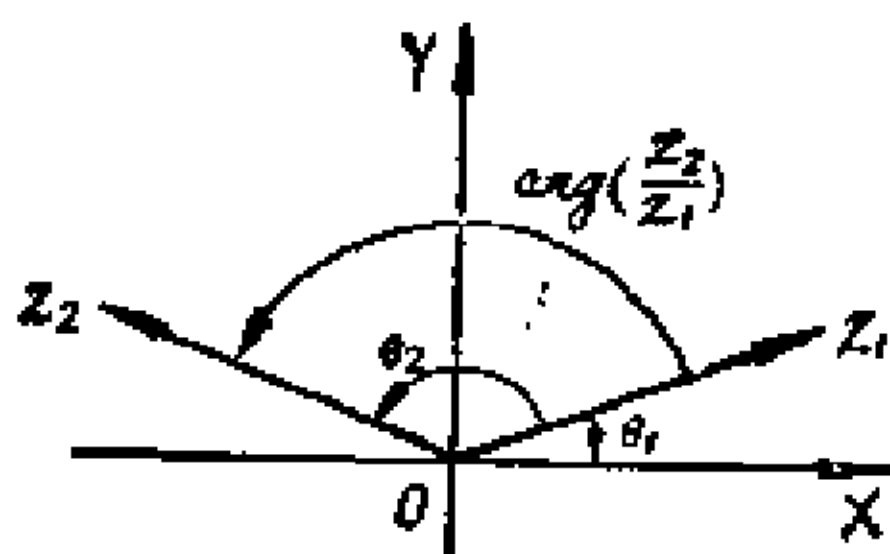


图 1.8

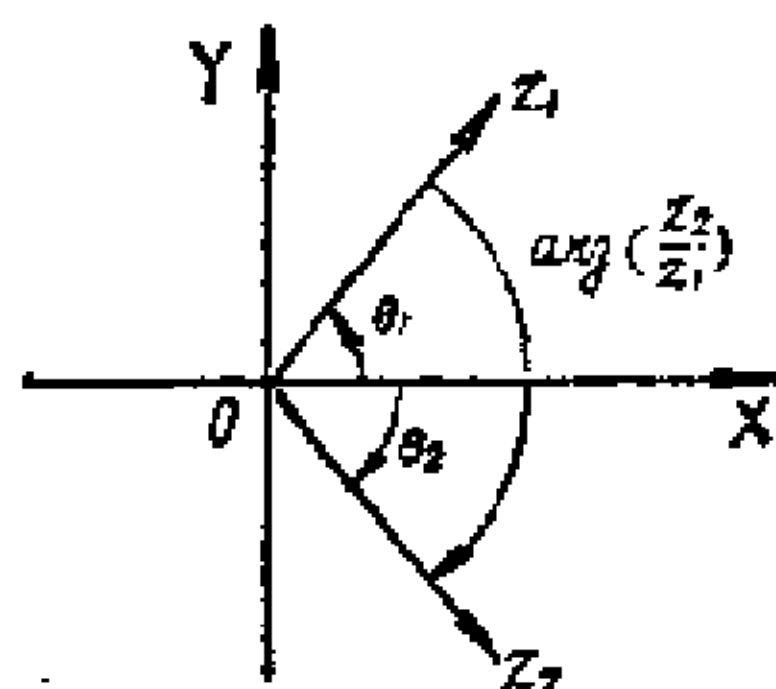


图 1.9

(图 1.9). 显然, 这种转动的角度, 按绝对值来说是不超过 π 的.

例如要算出 i 到 $-(1+i)$ 的有向转动角(图 1.10).

$$\begin{aligned} \arg\left[\frac{-(1+i)}{i}\right] &= \arg\left(-1 - \frac{1}{i}\right) \\ &= \arg(-1 + i) \\ &= \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

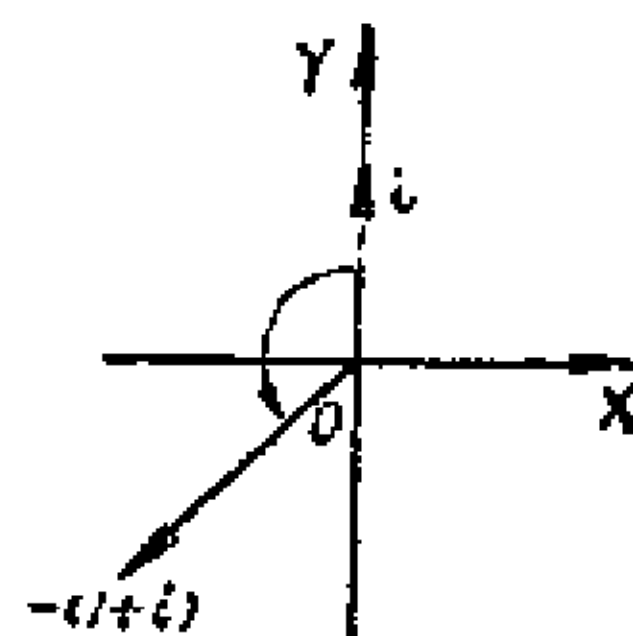


图 1.10

最后复习一下 1 开 n 次方, 这里 n 为自然数, 这就是说要 求出复数 z 使 $z^n = 1$. 设 $z = \rho e^{i\theta}$, 于是

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{\rho \cdot \rho \cdots \rho}_{n \text{ 个}} \cdot \underbrace{e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdots e^{i\theta}}_{n \text{ 个}} \\ &= \rho^n e^{in\theta} = 1. \end{aligned}$$

对等式的两边取模, 得 $\rho^n = 1$, 因 ρ 是正实数, 故 $\rho = 1$. 因为, 不论 k 是什么整数, 当 $n\theta = 2k\pi$ 时都有

$$e^{in\theta} = e^{i2k\pi} = 1,$$

所以 $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ 对于任何整数 k 都是 1 的 n 次根, 但是在它们中

間,彼此不同的只有 n 个,这 n 个根可以令 $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ 而得到,即

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \dots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

是 n 个互不相同的 1 的 n 次根. 它們叫做 n 次单位根. 由于它們的模等于 1, 所以都在以原点为中心半徑为 1 的圓周(此圓称为单位圓)上, 而且相邻的两个幅角相差 $\frac{2\pi}{n}$.

特別的, 当 $n=3$ 时, 得三次单位根为:

$$1, e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

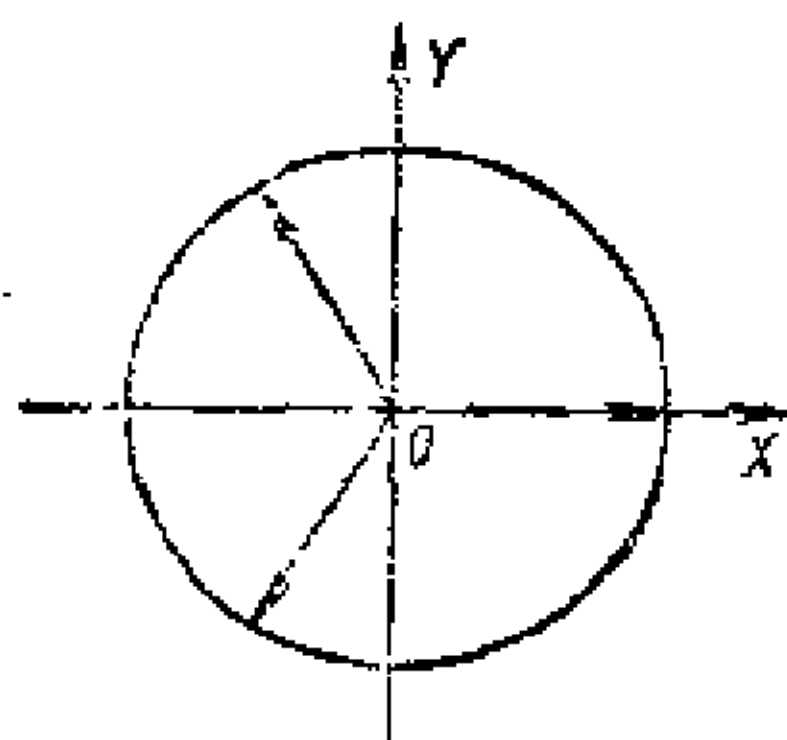


图 1.11

它們的分布如图 1.11 所示.

一切必要的預备知識的叙述到此为止. 这都是一些簡單的、在中学課本里已經学过的东西, 但是对閱讀这本小册子以后的内容來說都是基本重要的. 特别是把复数看成平面向量; 复数加法的

平行四边形法則; 用 $e^{i\theta}$ 去乘 z_0 的几何解釋; 用一正实数 ρ 去乘 z_0 的几何解釋等等, 都应该彻底了解并学会熟练地运用.

第一节的习题

1. 滿足下列关系的点 z 位于何处? 作出图形.

1. $|z| \leq 2$

2. $2 < |z| \leq 4$

3. $R(z) > \frac{1}{2}$

4. $I(z) \leq \frac{1}{2}$

$$5. R(s) = I(z)$$

$$6. \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$7. 0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$$

$$8. I(z^2) = 2$$

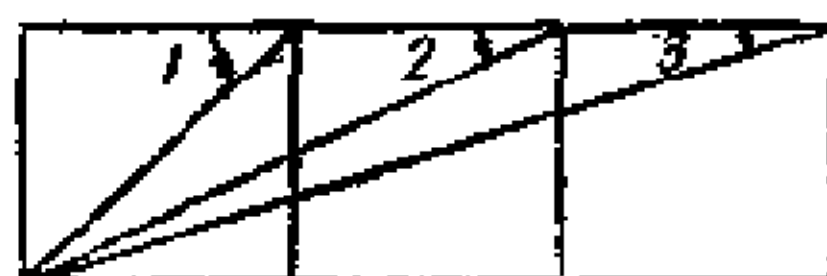
$$9. I(z^2) > 2$$

$$10. \left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1$$

2. 已知一正三角形两顶点为 a, b , 试写出在一切可能情形下的另一顶点.

3. 已知一正方形的两顶点为 a, b , 试写出在一切可能情形下的其它两顶点.

4. 右图是并列的三个大小相同的正方形, 证明



$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \frac{\pi}{2}.$$

(第4题)

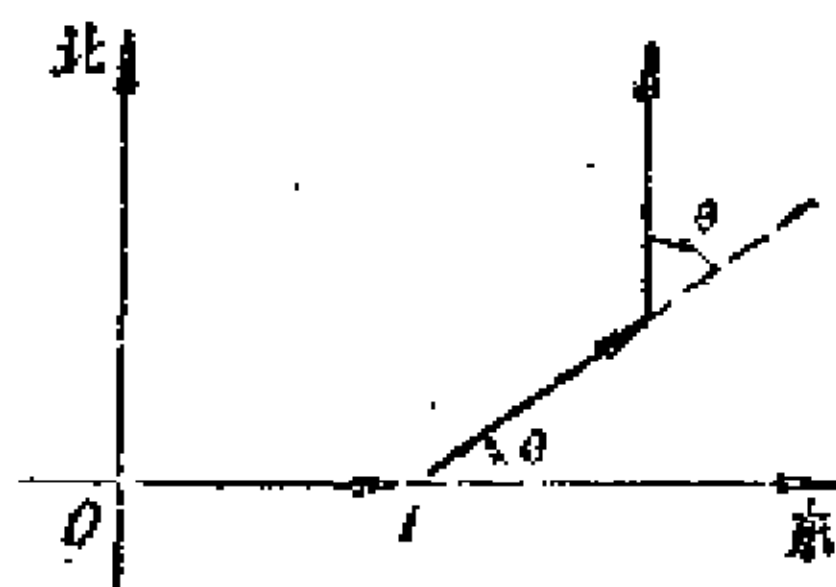
5. 设 z_1, z_2, z_3 三点适合下列条件:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$$

求证 z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆的正三角形的三个顶点.

6. 有一个人在草原上漫步, 开始时从 O 处出发, 向正东行走, 每走过 1 公里后便向左转一角度 θ . 问他走过了 N 公里后, 离出发点的直线距离是多少(见右图)?



(第6题)

二 一些例子

这里, 我们用第一节中介绍过的知识来解一些初等几何中的问题.

1° 从复数相加的几何解释(参看图 1.3), 可以看出

$$|\vec{Oz}| \leq |\vec{Oz_1}| + |\vec{Oz_2}|.$$

这是因为：任何三角形两边之和必不小于第三边。把上述不等式用复数写出来是

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1)$$

这是一个常用的不等式。

现在设 $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ 。令 $\bar{z} = x - iy$ ，称 \bar{z} 为 z 的共轭复数。容易看出， z 与 \bar{z} 居于关于实轴对称的位置（图 2.1）。于是

$$\bar{z} = \rho e^{-i\theta}.$$

故

$$|z|^2 = \rho^2 = (\rho e^{i\theta})(\rho e^{-i\theta}),$$

亦即

$$|z|^2 = z\bar{z}. \quad (2)$$

设 a 为一固定点，若动点 z 到 a 的距离等于常数 ρ ，则 z 满足条件

$$|z - a| = \rho. \quad (3)$$

可见适合(3)的点 z 描画出以 a 为中心以 ρ 为半径的圆周。可

以将(3)改写成

$$z - a = \rho e^{i\theta}, \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

亦即

$$z = a + \rho e^{i\theta}. \quad (4)$$

当 θ 从 $-\pi$ 变到 π 时，由(4)的右边表达的复数 z 就描出圆周一圈（图 2.2）。

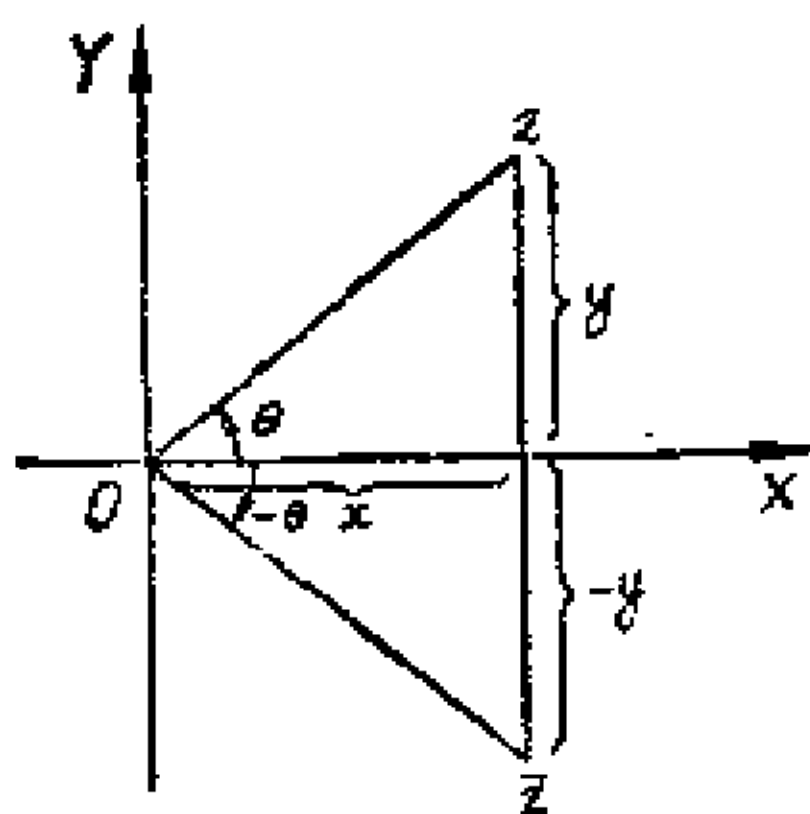


图 2.1

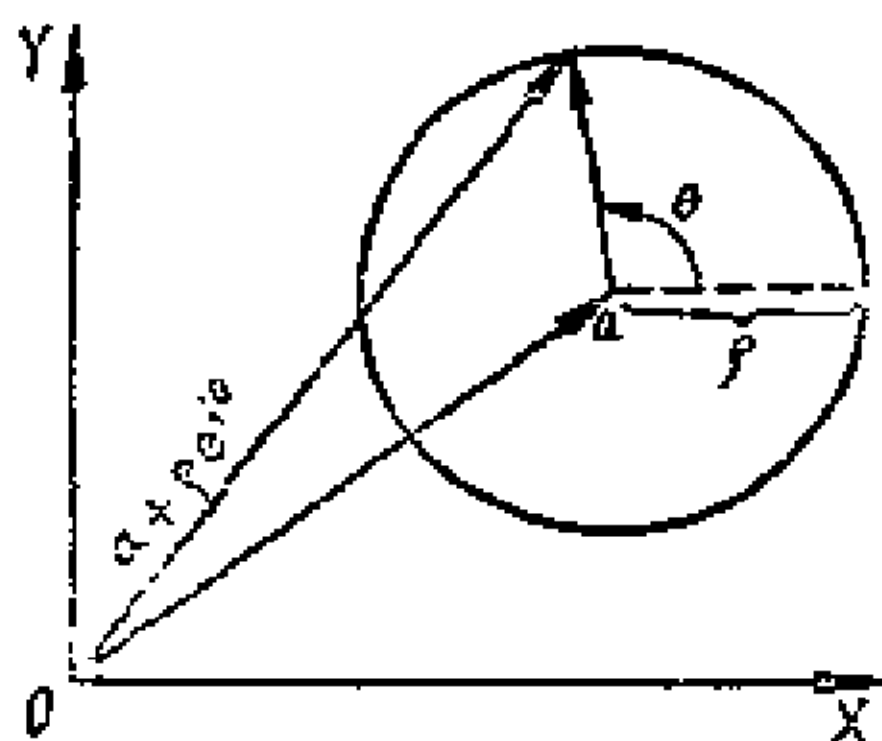


图 2.2

特別, 若此圓中心在原点, 即 $a=0$, 則圓周上的点 z 适合

$$|z| = \rho \text{ 或 } z = \rho e^{i\theta}.$$

对于单位圓周上的点 z , 則有

$$|z| = 1 \text{ 或 } z = e^{i\theta}.$$

例 1 证明等式 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$,
并对此等式作出几何解释.

证 利用(2)可得

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2), \\ |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2). \end{aligned}$$

將此二式相加便得

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

这等式的几何意义是: 平行四边形的对角綫的平方和等于四
条边的平方和(图 2.3).

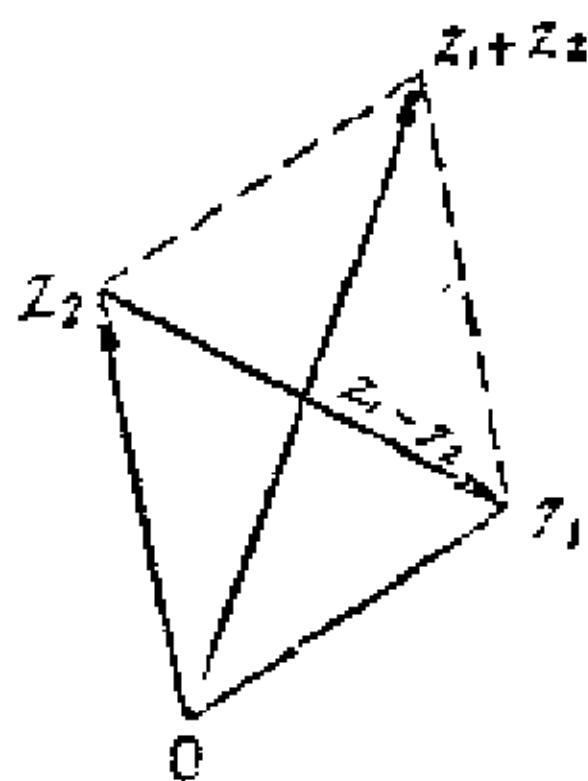


图 2.3

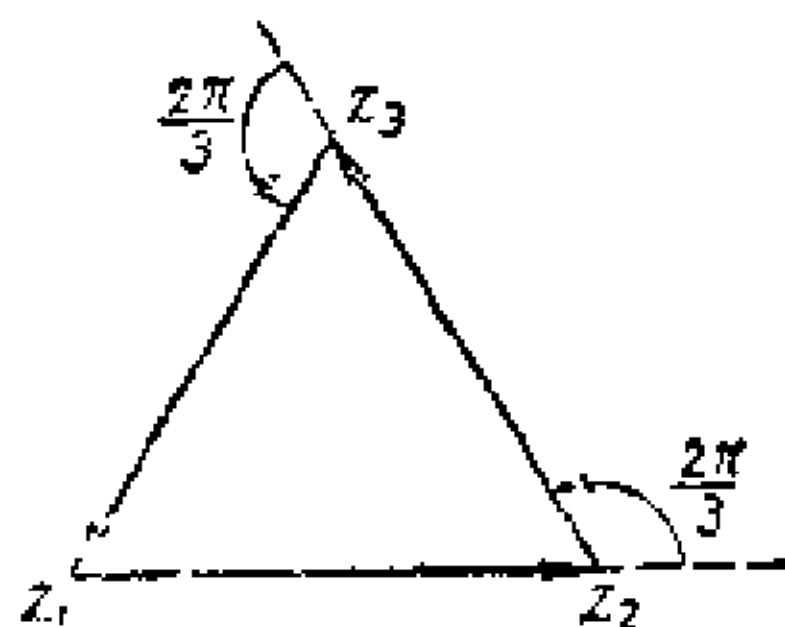


图 2.4

例 2 求证三个复数 z_1, z_2, z_3 組成一正三角形的三个頂
点的必要充分条件是它們适合等式

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2.$$

证 i) 必要性

設 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 为正三角形(图 2.4), 所以三外角都等于 $\frac{2\pi}{3}$,

故

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

并且三边都相等, 即

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|.$$

由此可推出

$$\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} \left(= e^{i\frac{2\pi}{3}} \right).$$

将此式变为 $(z_3 - z_2)^2 = (z_1 - z_3)(z_2 - z_1)$ 后再化簡便得

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2.$$

ii) 充分性

設等式 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2$ 成立. 照 i) 中进行的步骤反推回去可得等式

$$\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_3}.$$

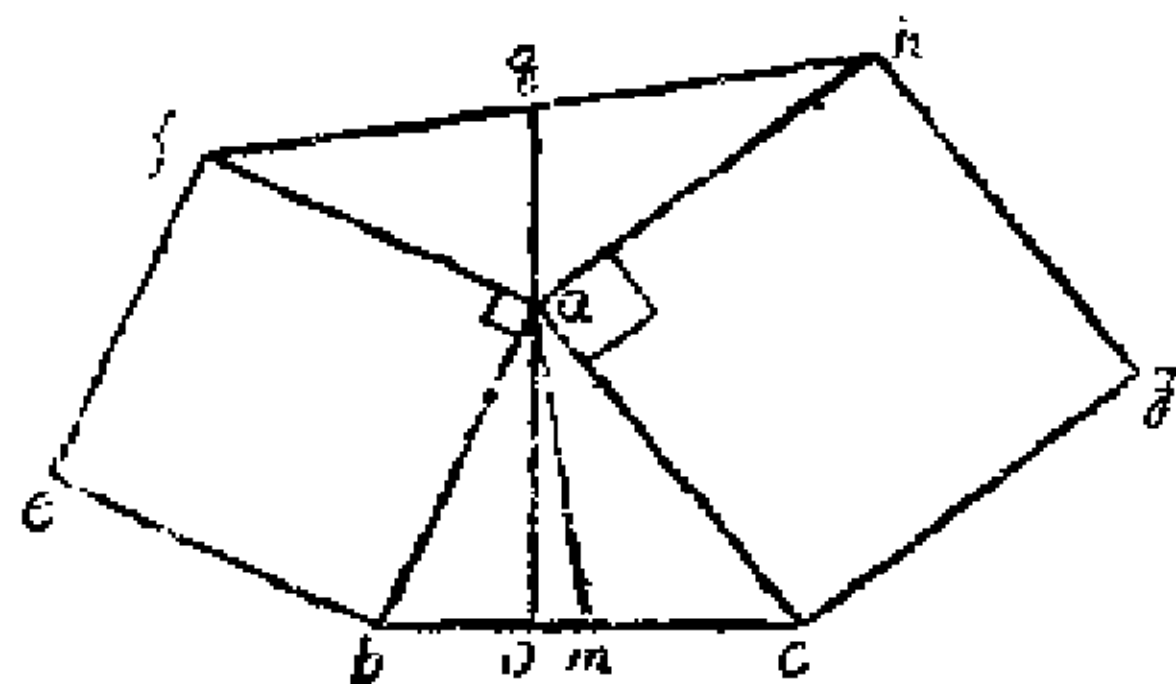


图 2.5

这正說明 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 三外角相等, 故为正三角形.

例3 在 $\triangle abc$ 的两边作正方形 $abef$ 及 $acgh$ (图 2.5). 求证

i) $\triangle abc$ 的高 ao

必平分 fh ;

ii) $\triangle abc$ 的中綫 am 之長為 fh 之長的一半.

証 適當选取坐標系, 使 b, c 之連綫為實軸, 而使 o 為原點. 於是 a 可以寫成 λi 的形狀, 這裡 λ 為一正實數, 而 b, c 都是實數.

i) 因為

$$f = a + (a - b)i,$$

$$h = a + (c - a)i,$$

故它們的連綫的中點 q 可表為

$$\begin{aligned} q &= \frac{f+h}{2} = a + \frac{(c-b)}{2}i \\ &= \lambda i + \frac{(c-b)}{2}i = \left(\lambda + \frac{c-b}{2}\right)i. \end{aligned}$$

這裡 $\lambda + \frac{c-b}{2}$ 是一實數, 這說明 q 在虛軸上, 因為高 ao 也在虛軸上, 故高 ao 平分 fh .

ii) 因為

$$\|\vec{fh}\| = |h - f| = |b + c - 2a|.$$

$$m = \frac{b+c}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \|\vec{am}\| &= |m - a| = \left|\frac{b+c}{2} - a\right| = \frac{1}{2}|b+c-2a| \\ &= \frac{1}{2}\|\vec{fh}\|. \end{aligned}$$

例 4 設 O 為平面上一定點, 考察平面上所有滿足條

件 $|\overrightarrow{Oa}| = \alpha$, $|\overrightarrow{Ob}| = \beta$ 的正三角形 $\triangle abc$. 問 $|\overrightarrow{Oc}|$ 的最大长度等于多少?

解 取 O 为复平面的原点, 不妨把 a 固定在正实轴上, 由于 $|\overrightarrow{Oa}| = \alpha$, 故 $a = \alpha$; 又因 $|\overrightarrow{Ob}| = \beta$, 故可写

$$b = \beta e^{i\theta}.$$

正三角形 $\triangle abc$ 的另外一个顶点有两个可能的位置, 如图 2.6

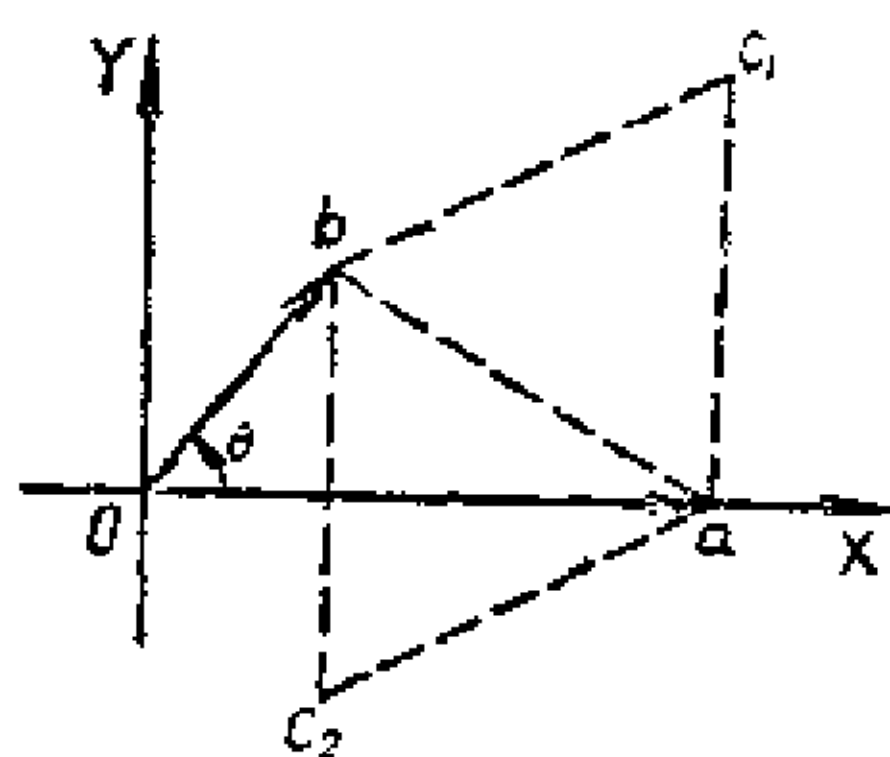


图 2.6

中的 c_1 及 c_2 所示. 由图可见

$$c_1 = b + (a - b)e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$c_2 = b + (a - b)e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

将 c_1, c_2 合记为 c , 把上两式合写为

$$\begin{aligned} c &= b + (a - b)e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \\ &= ae^{\pm i\frac{\pi}{3}} + b(1 - e^{\pm i\frac{\pi}{3}}). \end{aligned}$$

但因

$$e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 1,$$

故上式可以改成

$$\begin{aligned} c &= ae^{\pm i\frac{\pi}{3}} + be^{\mp i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{\mp i\frac{\pi}{3}}(ae^{\pm i\frac{2\pi}{3}} + b) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |c| &= |ae^{\pm i\frac{2\pi}{3}} + b| \\ &= |\alpha e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} + \beta e^{i\theta}|. \end{aligned}$$

这样一来, 求 $|\overrightarrow{Oc}|$ 的最大长度就化成求 $|c|$ 的最大值. 利用不

等式(1)可知

$$|c| \leq |\alpha e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}| + |\beta e^{i\theta}| = \alpha + \beta.$$

但当 $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$ 时, $c = (\alpha + \beta) e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$, 这时 $|\overrightarrow{Oc}|$ 就有最大长度 $\alpha + \beta$.

2° 在第一节中已经知道, 任一复数 z 都可以写成

$$z = |z| e^{i\theta},$$

其中 $\theta = \arg z$. 由此可得

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

取其实部和虚部便有

$$\cos \theta = R\left(\frac{z}{|z|}\right), \quad \sin \theta = I\left(\frac{z}{|z|}\right). \quad (5)$$

设 z_1, z_2 是两个不为零的向量, 前节已经指出, 从 $\overrightarrow{Oz_1}$ 到 $\overrightarrow{Oz_2}$ 的有向角 φ 满足

$$\varphi = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right).$$

将 $\frac{z_2}{z_1}$ 看成(5)中的 z , 于是 φ 就相当于(5)中 θ 的地位, 这样一来便得到

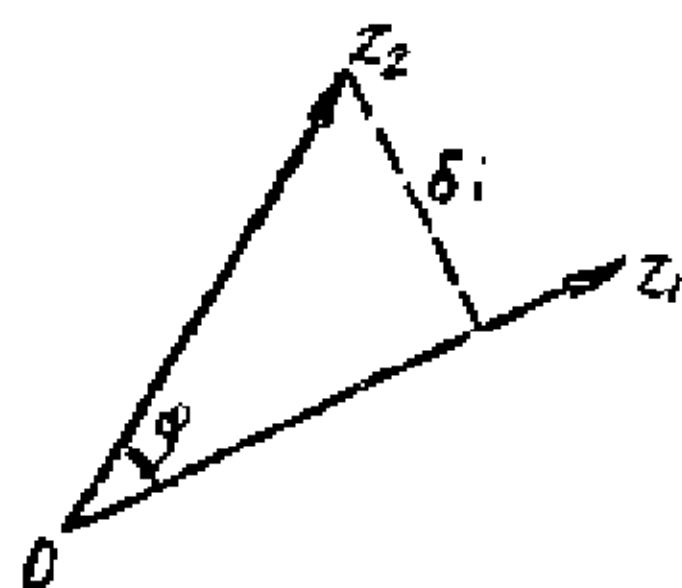
$$\begin{aligned} \cos \varphi &= R\left(\frac{z_2}{z_1} \bigg/ \left|\frac{z_2}{z_1}\right|\right) = R\left(\frac{z_2}{z_1} \frac{|z_1|}{|z_2|}\right) \\ &= R\left(\frac{z_2}{z_1} \frac{|z_1|^2}{|z_1||z_2|}\right) = R\left(\frac{z_2 z_1 \bar{z}_1}{z_1 |z_1| |z_2|}\right) \end{aligned}$$

$$= R\left(\frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1| |z_2|}\right) = \frac{1}{|z_1| |z_2|} R(\bar{z}_1 z_2). \quad (6)$$

同理

$$\sin \varphi = I\left(\frac{\bar{z}_1 z_2}{|z_1| |z_2|}\right) = \frac{1}{|z_1| |z_2|} I(\bar{z}_1 z_2). \quad (7)$$

利用(7)可以計算平面上点 z_2 到向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 的距离 δ . 从图 2.7



容易看出

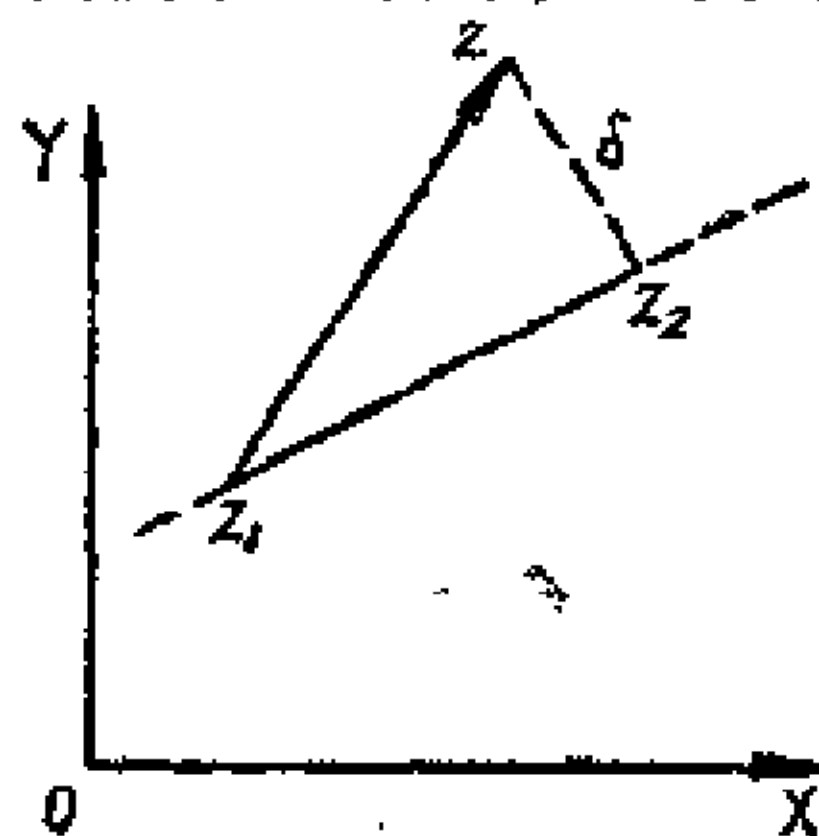
$$\begin{aligned} \delta &= |z_2| \sin \varphi = \frac{1}{|z_1|} I(\bar{z}_1 z_2) \\ &= I\left(\frac{\bar{z}_1}{|z_1|} \cdot z_2\right) = I(e^{-i\theta_1} z_2), \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\theta_1 = \arg z_1.$$

图 2.7

由于 $-\pi < \varphi \leq \pi$, 故 $\sin \varphi$ 可正可负, 从而 δ 也可正可负, 于是由公式(8)表示出的距离, 称为有向距离. 为了得到距离



的数值, 只计算 $|\delta|$ 就可以了.

平面上一点 z 到另外两点 z_1 , z_2 的连线的有向距离 δ , 正好是向量 $z - z_1$ 的终点到向量 $z_2 - z_1$ 的有向距离 (图 2.8), 按公式(8)有

$$\delta = I[e^{-i \arg(z_2 - z_1)} (z - z_1)]. \quad (9)$$

现在利用公式(9)来解一个题.

例 5 n 个内角都相等的凸 n 边形内的任一点到各边的距离之和等于一个常数.

证 設在复数平面上, 此凸 n 边形的 n 个顶点按反时针方向排列可用复数 z_1, z_2, \dots, z_n 表示 (图 2.9), 并設此多边形

的内角为 φ , 外角为 θ , 于是

$$\begin{aligned} n\theta &= n(\pi - \varphi) = n\pi - n\varphi \\ &= n\pi - (n-2)\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

令

$$\arg(z_2 - z_1) = \theta_0.$$

可见

$$\arg(z_3 - z_2) = \theta_0 + \theta,$$

$$\arg(z_4 - z_3) = \theta_0 + 2\theta,$$

.....

$$\arg(z_n - z_{n-1}) = \theta_0 + (n-2)\theta,$$

$$\arg(z_1 - z_n) = \theta_0 + (n-1)\theta.$$

从而, 依公式(9), z 到各边距离之和为

$$\begin{aligned} & I[(z - z_1)e^{-i\arg(z_2 - z_1)}] + I[(z - z_2)e^{-i\arg(z_3 - z_2)}] \\ & + \dots + I[(z - z_n)e^{-i\arg(z_1 - z_n)}] \\ & = I[(z - z_1)e^{-i\theta_0}] + I[(z - z_2)e^{-i(\theta_0 + \theta)}] + \dots \\ & + I[(z - z_n)e^{-i(\theta_0 + (n-1)\theta)}] \\ & = I[ze^{-i\theta_0}(1 + e^{-i\theta} + e^{-i2\theta} + \dots + e^{-i(n-1)\theta})] \\ & - I[e^{-i\theta_0}(z_1 + z_2e^{-i\theta} + z_3e^{-i2\theta} + \dots + z_ne^{-i(n-1)\theta})]. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} 1 + e^{-i\theta} + e^{-i2\theta} + \dots + e^{-i(n-1)\theta} &= \frac{1 - e^{-in\theta}}{1 - e^{-i\theta}} \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi i}}{1 - e^{-i\theta}} = 0, \end{aligned}$$

从而

$$I[ze^{-i\theta_0}(1 + e^{-i\theta} + e^{-i2\theta} + \dots + e^{-i(n-1)\theta})] = I(0) = 0.$$

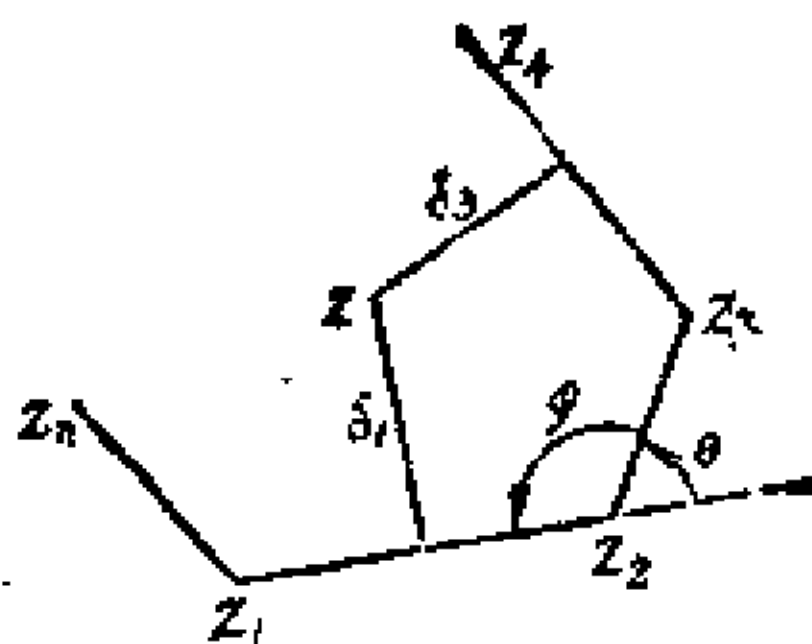


图 2.9

于是距离之和等于

$$= I[e^{-i\theta_0}(z_1 + z_2 e^{-i\theta} + z_3 e^{-i2\theta} + \cdots + z_n e^{-i(n-1)\theta})]$$

是一个与 z 无关的常数, 这就证明了我们的命题.

第二节的习题

1. 求出复数 a 关于直线 $R(z) = I(z)$ 的对称点.

2. (1) 求证向量 z 与 z' 垂直的必要充分条件是

$$R(\bar{z}z') = 0.$$

(2) 求证等式 $|z + z'| = |z| + |z'|$ 成立的必要充分条件是

$$R(\bar{z}z') = |z||z'|,$$

并对此作出几何解释.

3. 求证在四边形 $z_1 z_2 z_3 z_4$ 中, 对角线

互相垂直的必要充分条件是

$$\|\overrightarrow{z_1 z_2}\|^2 + \|\overrightarrow{z_3 z_4}\|^2 = \|\overrightarrow{z_2 z_3}\|^2 + \|\overrightarrow{z_4 z_1}\|^2$$

4. 在 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 的各边上, 分别向外作正三角形 $\triangle z_1 z_2 w_3$,

$\triangle z_2 z_3 w_1$, $\triangle z_3 z_1 w_2$.

求证: $\triangle w_1 w_2 w_3$ 为正三角形的必要充分条件是 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 为正三角形.

5. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 若

$$\overline{AC}^2 \cdot \overline{BD}^2 = \overline{AB}^4 + \overline{AD}^4,$$

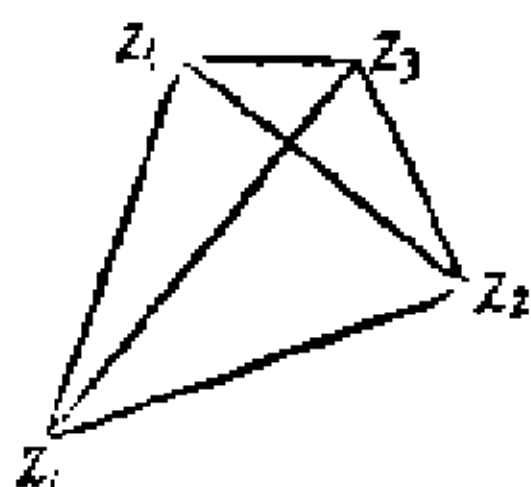
适当地选取坐标系以证明: 这平行四边形的锐角必为 45° .

6. 若四复数 z_1, z_2, z_3, z_4 适合条件

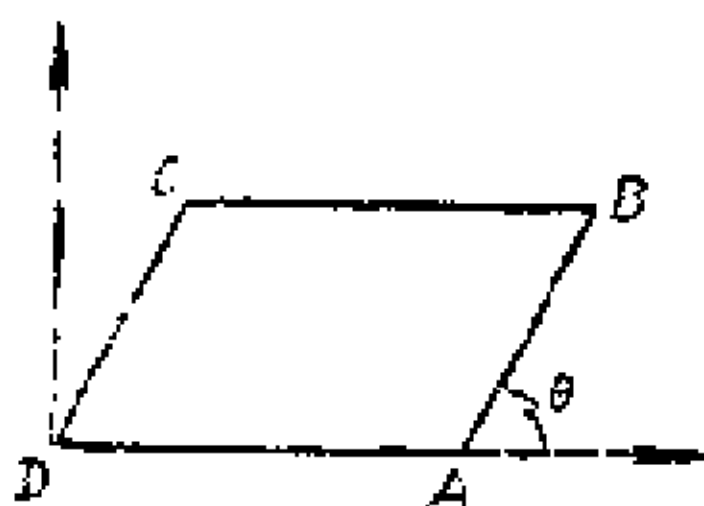
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0,$$

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1.$$

求证它们构成一个内接于单位圆的一矩形的四个顶点.



(第3题)



(第5题)

三 共綫、共圓、共点

1° 設 z_1, z_2, z_3 三点同在一條直綫上, 由图 3.1 可見向量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 和 $\overrightarrow{z_1 z_3}$ 的关系不外乎下面两种:

- i) $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 与 $\overrightarrow{z_1 z_3}$ 方向相同;
- ii) $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 与 $\overrightarrow{z_1 z_3}$ 方向相反.

在前一种情形此二向量夹角为零, 在后一种情形此二向量的夹角为 π . 这就是說

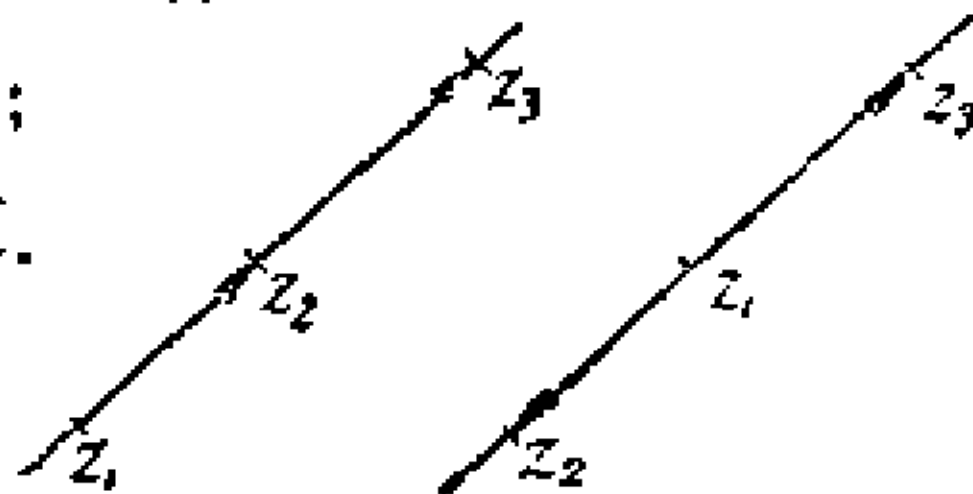


图 3.1

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0 \text{ 或 } \pi. \quad (1)$$

反之, 若(1)成立, 則 z_1, z_2, z_3 必同在一條直綫上. 但是大家知道, 一个复数的幅角是零或 π , 則这复数一定是一个异于零的实数; 反过来也对. 于是可以把条件(1)改写为

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda. \quad (\lambda \text{ 为一实数})$$

因此我們得到結論: 三点 z_1, z_2, z_3 共綫的必要充分条件是

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \quad (\lambda \text{ 实数}). \quad (2)$$

这里不排除 $\lambda = 0$ 的情形, 因为当 $\lambda = 0$ 时, $z_1 = z_3$, 于是三点 z_1, z_2, z_3 实际上是两点 z_1, z_2 , 它們当然是共綫的. 条件(2)用起来并不方便, 起碼, 对于同在一直綫上的三点 z_1, z_2, z_3 , 它們在(2)中的地位是不对称的. 为了消除这种不对称性, 我們給出

定理一 三点 z_1, z_2, z_3 共綫的必要充分条件是: 存在三

个不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 满足关系

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

并使

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0. \quad (3)$$

证 i) 必要性

若 z_1, z_2, z_3 共线, 则依(2)有

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \text{ (实数).}$$

此即

$$(\lambda - 1)z_1 - \lambda z_2 + z_3 = 0.$$

只要令 $\lambda_1 = \lambda - 1, \lambda_2 = -\lambda, \lambda_3 = 1$, 便知

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (\lambda - 1) + (-\lambda) + 1 = 0,$$

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0.$$

因为已经有 $\lambda_3 = 1 \neq 0$, 所以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为零是当然的.

ii) 充分性

若不全为零的三个实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (不妨设 $\lambda_3 \neq 0$) 满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ 又使(3)成立. 于是, 解出 $\lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3)$, 代

入(3)可得

$$\lambda_3(z_3 - z_1) + \lambda_2(z_2 - z_1) = 0.$$

由此可得

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \text{ (实数).}$$



图 3.2

从而 z_1, z_2, z_3 三点共线.

设 z_1, z_2 是两个固定点. 现在要在它们的连线上求出一
点 z , 将线段 z_1, z_2 按事先给定的比例分成两个线段(图 3.2).

就是說給出實數 λ, μ 來找出一點 z 使

$$\|\overrightarrow{z_1 z}\| : \|\overrightarrow{z z_2}\| = \mu : \lambda,$$

亦即

$$\lambda \|\overrightarrow{z_1 z}\| = \mu \|\overrightarrow{z z_2}\|.$$

由於此時 $\overrightarrow{z_1 z}$ 和 $\overrightarrow{z z_2}$ 的方向相同，從而上式相當於

$$\lambda(z - z_1) = \mu(z_2 - z).$$

從這裡可以解出

$$z = \frac{\lambda z_1 + \mu z_2}{\lambda + \mu}, \quad (4)$$

這裡的 λ, μ 可以是同號的實數。特別當 $\lambda = 0$ 時，(4) 給出 $z = z_2$ ； $\mu = 0$ 時給出 $z = z_1$ ；而當 $\lambda = \mu$ 時，(4) 給出 z_1 與 z_2 的連線的中點 $\frac{z_1 + z_2}{2}$ 。

我們還允許分點 z 取在 z_1 與 z_2 的連線的延長綫上，但此時 $\overrightarrow{z_1 z}$ 與 $\overrightarrow{z z_2}$ 方向正好相反（圖 3.

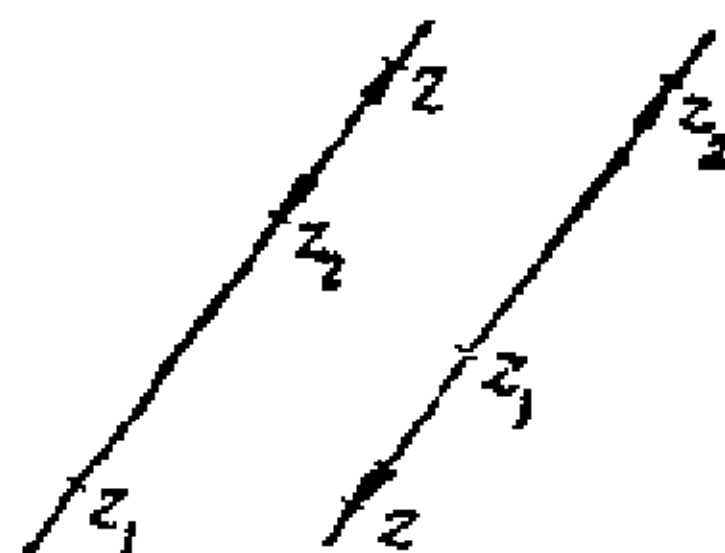


圖 3.3

3)。因而在等式

$$\lambda(z - z_1) = \mu(z_2 - z)$$

中， λ 與 μ 必須是異號實數。反之，若允許 λ 與 μ 是異號實數（但 $\lambda \neq -\mu$ ），則由 (4) 表達出的點 z 必在 z_1 與 z_2 的連線的延長綫上。這樣的分點 z 稱為外分點；而當 λ, μ 同號時，由 (4) 表出的 z 稱為內分點。

若令 $\nu = \frac{\mu}{\lambda}$ ，則可將 (4) 改寫成

$$z = \frac{z_1 + \nu z_2}{1 + \nu}, \quad (5)$$

其中 $\nu \neq -1$. 在(5)中, 只包含一个参数 ν , 仔细地讨论 ν 变动时分点 z 在 z_1, z_2 连线上运动的情况不但是有趣的, 而且是重要的. 当 $\nu = 0$ 时, 得到点 z_1 ; 而当 $0 < \nu < +\infty$ 时(这正是说 λ, μ 同号), 就对应着内分点. 当 ν 从 0 增加到 $+\infty$ 时, 点 z 从 z_1 渐渐走近点 z_2 . 当 λ, μ 异号时, 此时 $\nu < 0$, 所以负实数 ν 代入(5)所决定出来的是外分点. 这时又可以细分为两种情形:

i) $-\infty < \nu < -1$, 此时分点 z 在延长线上 z_2 的外边, 当 ν 无限靠近 -1 时, 分点可移到离 z_2 任意远的地方, 而 ν 的绝对值无限增大时, z 就越来越靠近 z_2 这一点.

ii) $-1 < \nu < 0$, 此时分点 z 在延长线上 z_1 的外边, 当 ν 无限地靠近 -1 时, 分点 z 可以移到离 z_1 任意远的地方(图 3.4).

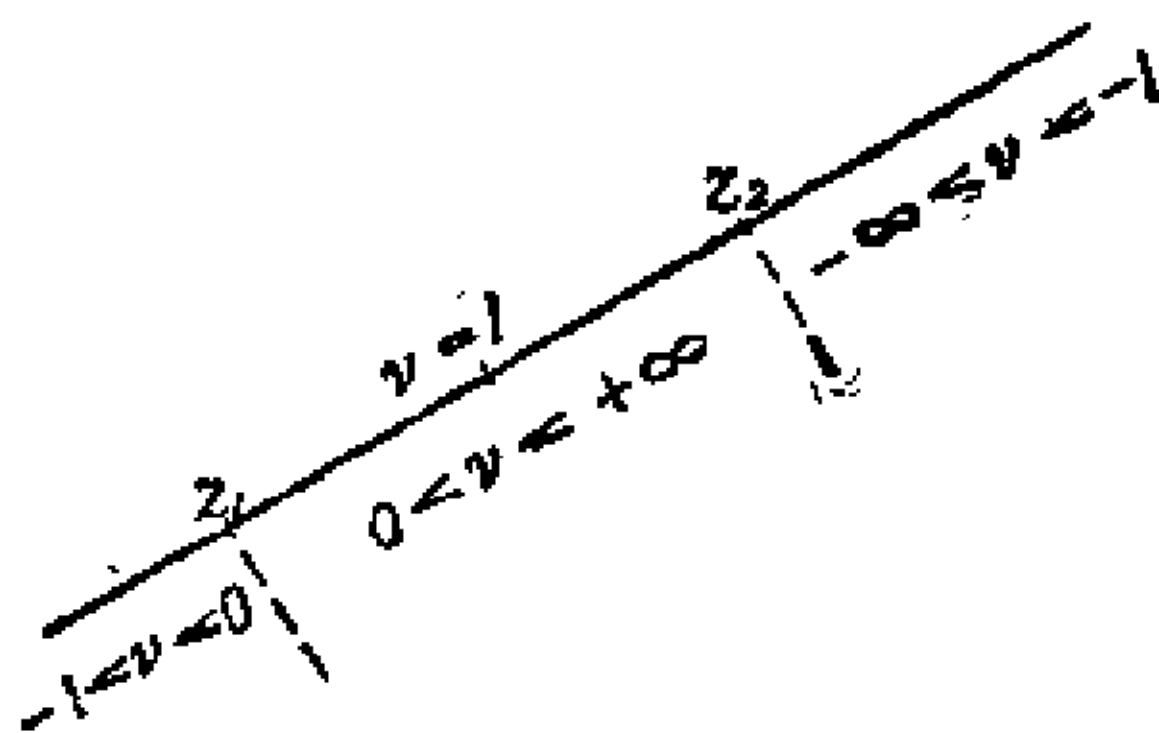


图 3.4

公式(4)或(5)都称为定比分点公式.

例1 求 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 的重心.

解 三角形三条中线的交点即为三角形的重心. 先求

$z_1 z_2$ 的中点

$$z' = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

而三角形的重心 z 要把 z' 和 z_3 的连线按 1:2 分成两个线段, 于是按公式(4)有

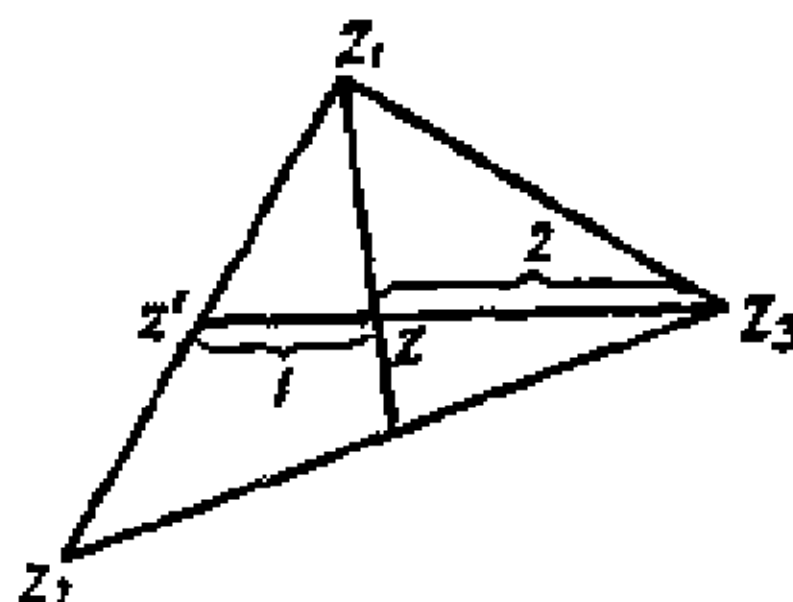


图 3.5

$$\begin{aligned} z &= \frac{2z' + 1 \cdot z_3}{2 + 1} = \frac{2\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) + z_3}{3} \\ &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \end{aligned}$$

这就是 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 的重心.

例 2 求证: 若三角形的重心和它的外心重合, 则此三角形为一正三角形.

证 适当选取坐标系, 使此三角形的重心合于原点. 设在此坐标系下, 此三角形的三个顶点用复数 z_1, z_2, z_3 表示, 由于原点是外心, 故

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho,$$

又由于原点亦是重心, 故由例 1 可知

$$0 = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3),$$

亦即

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

从而

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= z_1 z_2 z_3 \left(\frac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} + \frac{\bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_3}{z_3 \bar{z}_3} \right) \\
&= z_1 z_2 z_3 \left(\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} + \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} + \frac{\bar{z}_3}{|z_3|^2} \right) \\
&= \frac{z_1 z_2 z_3}{\rho^2} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\
&= \frac{z_1 z_2 z_3}{\rho^2} \overline{(z_1 + z_2 + z_3)} = 0.
\end{aligned}$$

又从

$$(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0,$$

可得

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) = 0.$$

結合此两式可知

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1,$$

由第二节的例 2 便知 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 为正三角形.

2° 現在来求出四个点同在一个圓周上的条件. 四点放在同一个圓周上一共有六种花样. 这里虽然只画出两种情形来討論, 但結論对其余情形同样有效, 耐心的讀者不妨一一验证之.

設 z_1, z_2, z_3, z_4 按下列两种方式分布在一个圓周上 (图 3.6). 無論在哪一种情形, 图上所标出的、頂点在 z_1 及 z_2 的两个有向角都可以用

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) \text{ 及 } \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)$$

来計算. 不同的只是在左图的情形, 此二有向角相等, 故

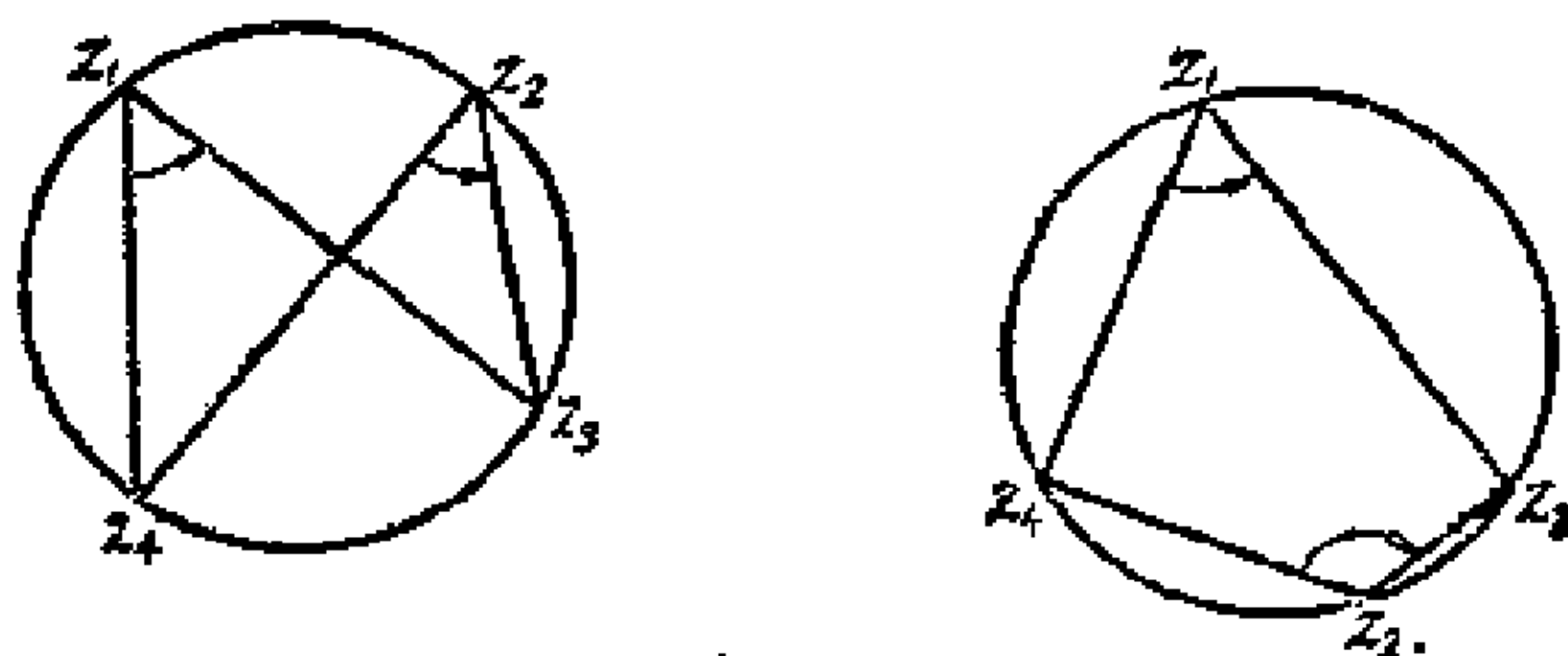


图 3.6

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right),$$

从而

$$\begin{aligned} & \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} ; \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) \\ &= \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0. \end{aligned}$$

在右图的情形，顶点在 z_1 的有向角与顶点在 z_2 的有向角的相反有向角之和正好等于 π ，即

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) - \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \pi,$$

从而

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} ; \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \pi.$$

合并起来可以写成

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} ; \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0 \text{ 或 } \pi,$$

这相当于说，复数

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} ; \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_4)}$$

是一个实数，为方便计，我们令

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)},$$

并称它为由 z_1, z_2, z_3, z_4 所构成的交比。根据以上推理可知， z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的一个必要条件是交比 (z_1, z_2, z_3, z_4) 是一个实数。

现在设 (z_1, z_2, z_3, z_4) 为实数，分两种情形来讨论：如果这四点中有三点不共线，那么过这三点必有唯一的一个圆周通过，因为此时交比为一实数，故将前述推理倒回去，并利用初等几何中的简单事实，可知第四个点亦必在这个圆周上。其次，如果此四点中有三点共线，不妨设 z_2, z_3, z_4 共线，于是依上段的讨论可知

$$\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \text{实数}.$$

又因为

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \text{实数},$$

故

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = \text{实数}.$$

这表明 z_1, z_3, z_4 共线，从而 z_1, z_2, z_3, z_4 在同一条直线上。总起来说，当交比 (z_1, z_2, z_3, z_4) 为一实数时， z_1, z_2, z_3, z_4 必共圆或共线。由于可能“共线”，这似乎破坏了“共圆”的统一性。为了消除这个缺陷，我们今后把直线也看成圆周，只是它的半径不是一个有限数，就是说把直线看成是半径为无限大的圆

周, 今后我們永远采取这种看法.

我們把上述結果写成

定理二 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的必要充分条件是交比

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} = \text{实数}.$$

談到交比, 必須指出任何四个复数的交比的一个几何解釋. 置

$$\psi_1 = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right), \quad \psi_2 = \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right),$$

$$\varphi = \arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \psi_1 - \psi_2.$$

分別作过 z_1, z_3, z_4 及 z_2, z_3, z_4 的圓周, 又在 z_3 处分別作两圓的切綫, 用 θ_1 及 θ_2 分別記这两条切綫与連 z_3, z_4 的弦所夾的角 (图 3.7). 由初等几何知 $\theta_1 = \psi_1$, $\theta_2 = \psi_2$, 从而

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \varphi = \theta_1 - \theta_2.$$

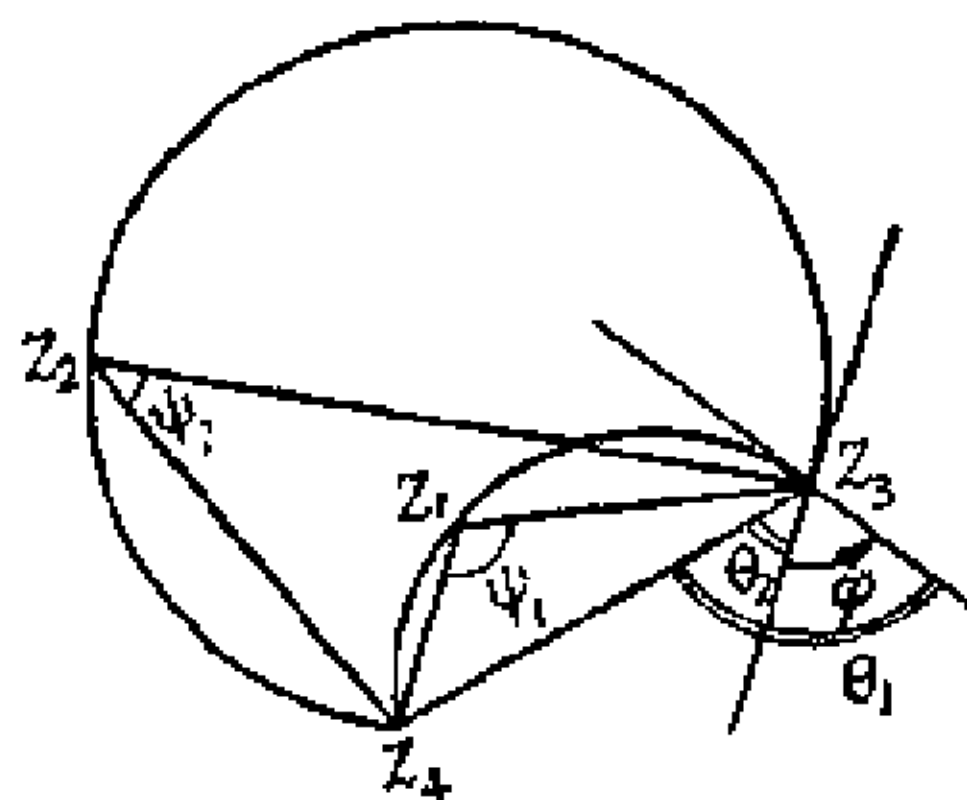


图 3.7

我們約定, 称两圓周在交点处的切綫間的夹角为这两个圓周的夹角, 这样一来, 上述等式可以叙述为: $\arg(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 等于过 z_1, z_3, z_4 与 z_2, z_3, z_4 的两个圓周間的夹角. 这个結論, 在第五节中将会用到.

最后, 再給出一个下段中要用到的四点共圆的条件.

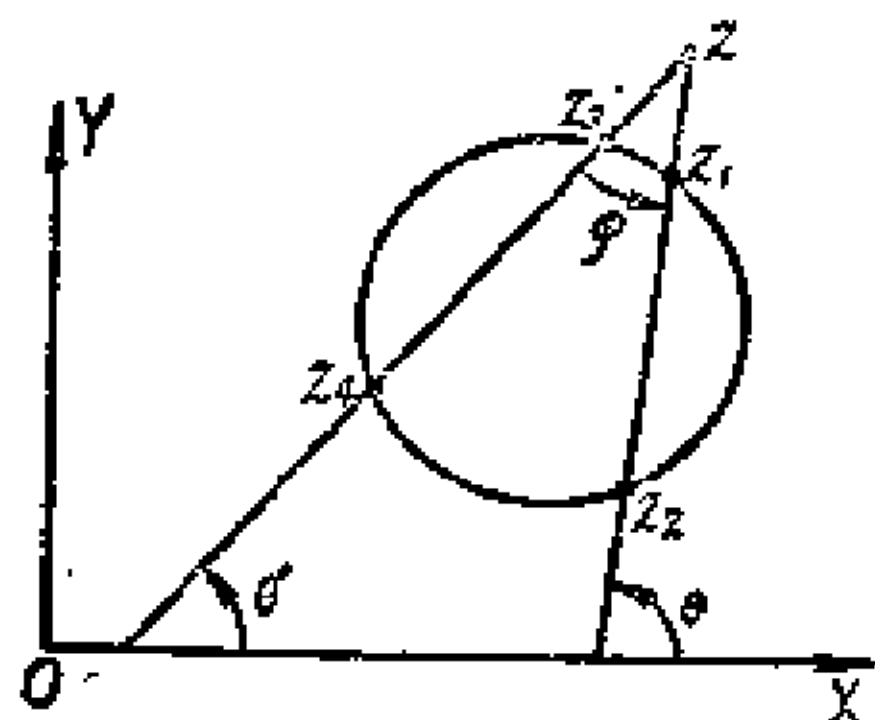
設 z_1, z_2, z_3, z_4 在同一个圓周上, 連結 z_2 与 z_1 , z_4 与 z_3

的两条直线交于圆外的一点 z (图 3.8), 命

$$|z - z_k| = \rho_k, \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$$\arg(z_1 - z_2) = \theta,$$

$$\arg(z_3 - z_4) = \theta'.$$



則

$$z - z_1 = \rho_1 e^{i\theta},$$

$$z - z_2 = \rho_2 e^{i\theta},$$

$$z - z_3 = \rho_3 e^{i\theta'},$$

$$z - z_4 = \rho_4 e^{i\theta'}.$$

图 3.8

于是

$$\begin{aligned} \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - z_3)(z - z_4)} &= \frac{\rho_1 \rho_2 e^{i2\theta}}{\rho_3 \rho_4 e^{i2\theta'}} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3 \rho_4} e^{i2(\theta - \theta')} \\ &= \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3 \rho_4} e^{i2\varphi}. \end{aligned}$$

由初等几何知

$$\rho_1 \rho_2 = \rho_3 \rho_4,$$

从而

$$\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - z_3)(z - z_4)} = e^{i2\varphi}.$$

其中

$$\varphi = \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}\right).$$

反之, 也可证明, 若 z_1, z_2, z_3, z_4 有上述性质, 它们必共圆.

3° 现在我们来讨论平面几何中有关三点共线、三线共点的問題. 首先给出

定理三 (Menelaus 定理)

在 $\triangle abc$ 的三边 (或它们的延长线) 上分别取三点 l, m, n (图 3.9), 则等式

$$\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n} = 1 \quad (6)$$

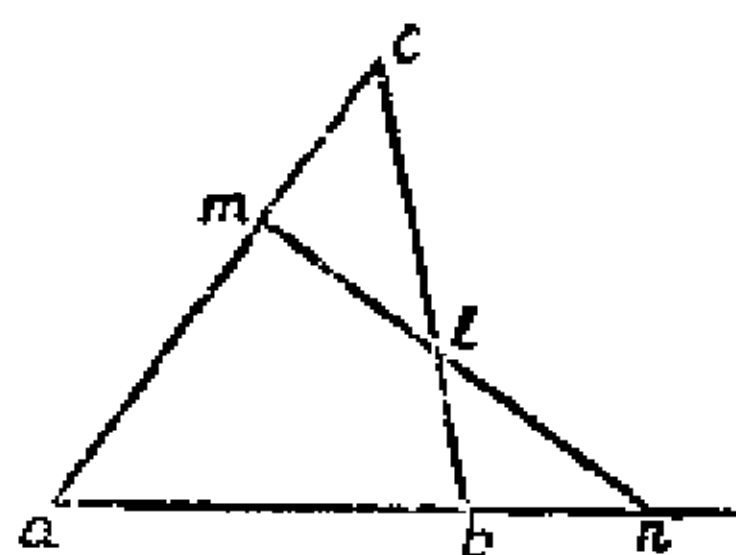


图 3.9

是 l, m, n 三点共线的必要充分条件.

证 (i) 充分性

设 (6) 成立, 由于 b, l, c 共线, 所以 $\frac{b-l}{c-l} = \text{实数}$, 不妨将这实数写成 $\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ 的形式, 即

$$\frac{b-l}{c-l} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

这里 λ_2, λ_3 都是实数且 $\lambda_2 \neq \lambda_3$, 否则就有 $\frac{b-l}{c-l} = 1$, 由此可推出 $b=c$, 这是不可能的.

同理, 由于 c, m, a 共线, 可设

$$\frac{c-m}{a-m} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \quad (\lambda_1 \text{ 为实数})$$

将此二式代入 (6), 可以解出

$$\frac{a-n}{b-n} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

将此三式分别改写成

$$\begin{aligned} (\lambda_3 - \lambda_2)l &= \lambda_2 c - \lambda_2 b, \\ (\lambda_1 - \lambda_3)m &= \lambda_1 a - \lambda_3 c, \\ (\lambda_2 - \lambda_1)n &= \lambda_2 b - \lambda_1 a, \end{aligned} \quad (7)$$

并将它们相加，便得

$$(\lambda_3 - \lambda_2)l + (\lambda_1 - \lambda_3)m + (\lambda_2 - \lambda_1)n = 0.$$

又因为

$$\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0,$$

且有

$$(\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_1) = 0,$$

应用定理一可知 l, m, n 共线.

ii) 必要性

设 l, m, n 共线，要来证明它们使(6)成立. 仍令

$$\frac{b-l}{c-l} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad \frac{c-m}{a-m} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3},$$

从而

$$\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-m}{a-m} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

我们指出 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，否则(7)的前两式将成为

$$(\lambda_3 - \lambda_1)l = \lambda_3 c - \lambda_1 b,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_3)m = \lambda_1 a - \lambda_3 c.$$

将此二式相加，

$$(\lambda_3 - \lambda_1)(l - m) = \lambda_1(a - b),$$

故

$$l - m = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3}(b - a).$$

这表明 \vec{ml} 平行于 \vec{ab} ，这是不可能的，因为 m, l 与 \vec{ab} 上的一点 n 是共线的，于是 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，亦即 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 是一个不等于1的实数.

依定比分点，必可在 a, b 的连线上找出一一点 n' ，使

$$\frac{a-n'}{b-n'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

事实上, 只須令

$$n' = \frac{\lambda_2 b + \lambda_1 a}{\lambda_2 + \lambda_1}$$

即可. 根据 n' 的取法可知

$$\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-n'}{b-n'} = 1. \quad (8)$$

由已經证明了的本定理的充分性部分知道 l, m, n' 共綫, 但題設 l, m, n 共綫. 因而 n 和 n' 都是 l, m, n 的連綫与 a, b 的連綫的交点. 但两条不平行的直綫只有唯一的一个交点, 故 $n' = n$. 于是(8)正是(6).

現在再来证明关于三綫共点的

定理四 (Ceva 定理)

在 $\triangle abc$ 的三边 (或它們的延長綫) 上分別取三点 l, m, n , 則等式

$$\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n} = 1 \quad (9)$$

是 a 与 l , b 与 m , c 与 n 的連綫相交于一点的必要充分条件.

证 i) 必要性

設这三条綫相交于点 p (图 3. 10). 考察 $\triangle bcn$. 由于 l, p, a 三点共綫, 利用定理三, 有

$$\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-p}{n-p} \cdot \frac{n-a}{b-a} = 1.$$

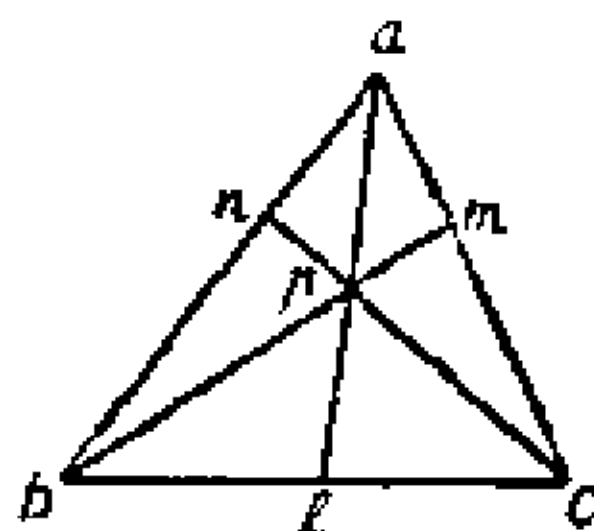


图 3.10

同理, 对 $\triangle mca$, 由于 p, m, b 三点共线, 有

$$\frac{n-p}{c-p} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-b}{n-b} = 1.$$

将上面两式相乘并整理后得

$$\frac{l-p}{c-l} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n} = -1.$$

ii) 充分性

设(9)成立, 命 b 与 m , c 与 n 的连线的交点为 p , 连 a 与 p 并设连线和对边相交于 l' . 由已经证明过的必要性部分可知

$$\frac{b-l'}{c-l'} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n} = -1.$$

将此式与(9)比较, 可得

$$\frac{b-l'}{c-l'} = \frac{b-l}{c-l},$$

由此可得 $l=l'$. 这正说明 a 与 l , b 与 m , c 与 n 的连线相交于点 p .

下面举几个例子来说明这两个定理的应用.

例 1 三角形的三高线共点(图

3.11),

证 由于 m, c, n, b 四点共圆, 利用 2° 最后给出的共圆条件, 有

$$\frac{(a-m)(a-c)}{(a-n)(a-b)} = e^{i2\alpha}.$$

同理有

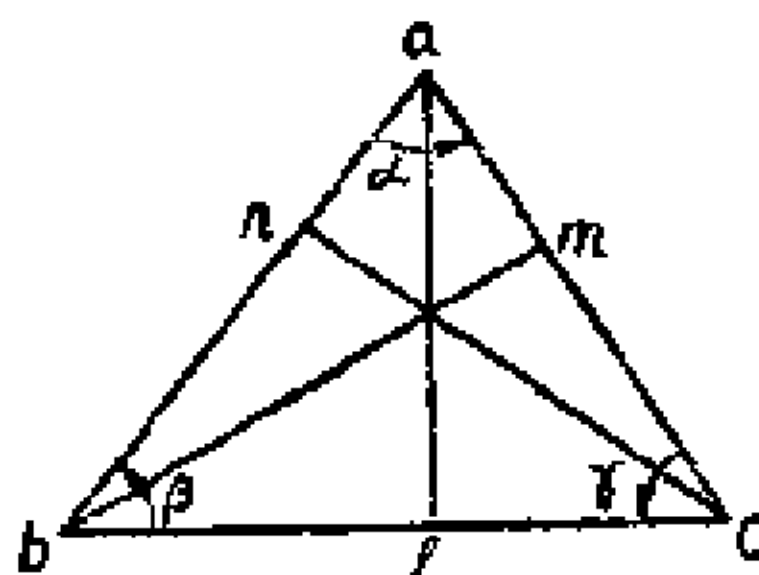


图 3.11

$$\frac{(b-n)(b-a)}{(b-l)(b-c)} = e^{i2\beta},$$

$$\frac{(c-l)(c-b)}{(c-m)(c-a)} = e^{i2\gamma}$$

将上面三式两边相乘并整理后得

$$\frac{c-l}{b-l} \cdot \frac{b-n}{a-n} \cdot \frac{a-m}{c-m} = -e^{i2(\alpha+\beta+\gamma)} = -e^{i2\pi} = -1$$

依定理四, 知三高线相交于一点.

例 2 (Desargues 定理)

设 $\triangle abc$ 和 $\triangle a'b'c'$ 的对应顶点 a, a', b, b', c, c' 的连线相交于一点 q , 则其对应边的交点 l, m, n 必共线 (图 3.12).

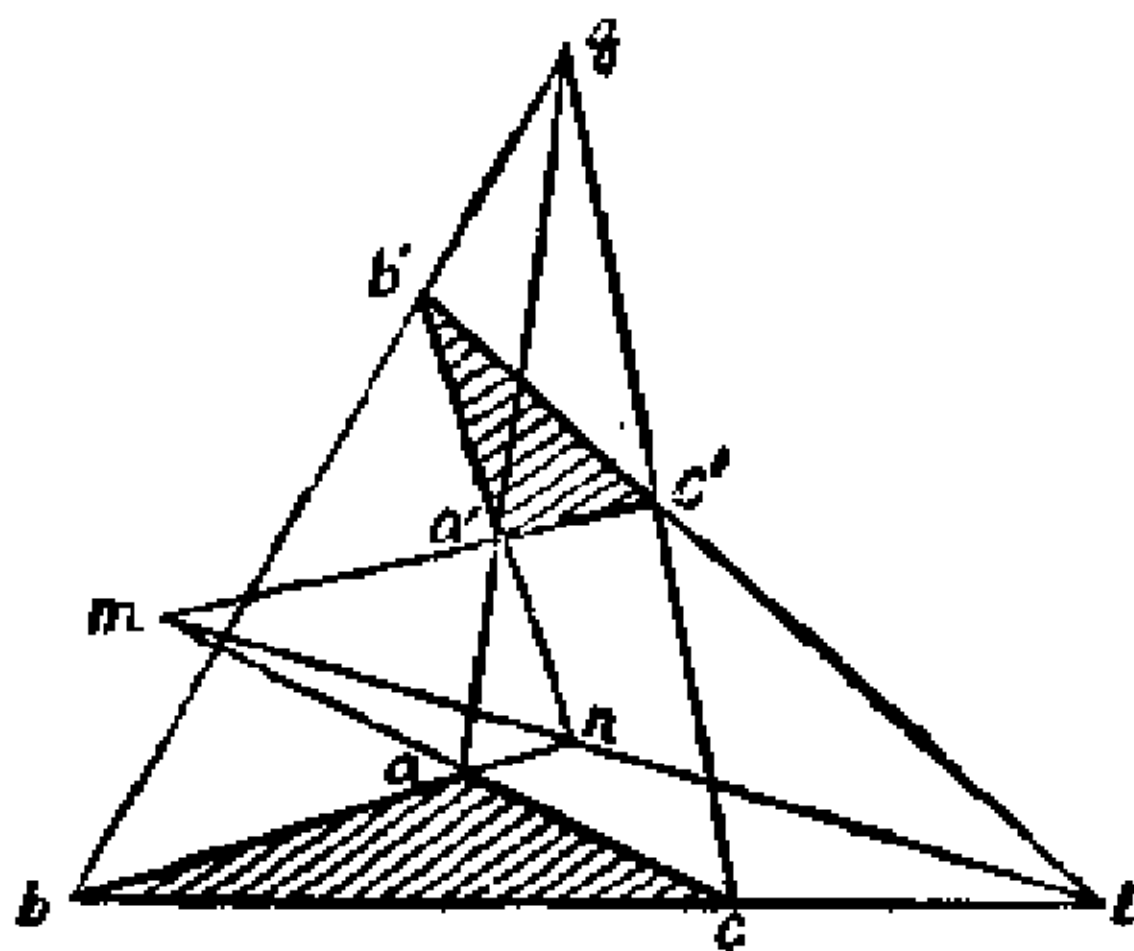


图 3.12

证 先考察 $\triangle bcq$, 由于 l, c', b' 三点共线, 依定理三便有

$$\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-c'}{q-c'} \cdot \frac{q-b'}{b-b'} = 1.$$

再考察 $\triangle caq$ 及 $\triangle abq$, 由于 m, a', c' 共线及 n, b', a' 共线, 故有

$$\frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-a'}{q-a'} \cdot \frac{q-c'}{c-c'} = 1,$$

$$\frac{a-n}{b-n} \cdot \frac{b-b'}{q-b'} \cdot \frac{q-a'}{a-a'} = 1.$$

将以上三式相乘并化简, 即得

$$\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n} = 1.$$

由于 l, m, n 分别是 $\triangle abc$ 三边上的点, 仍依定理三, 知 l, m, n 共线.

例 3 (Pascal 定理)

内接于圆的任意六边形的三双对边的交点共线 (图 3.13).

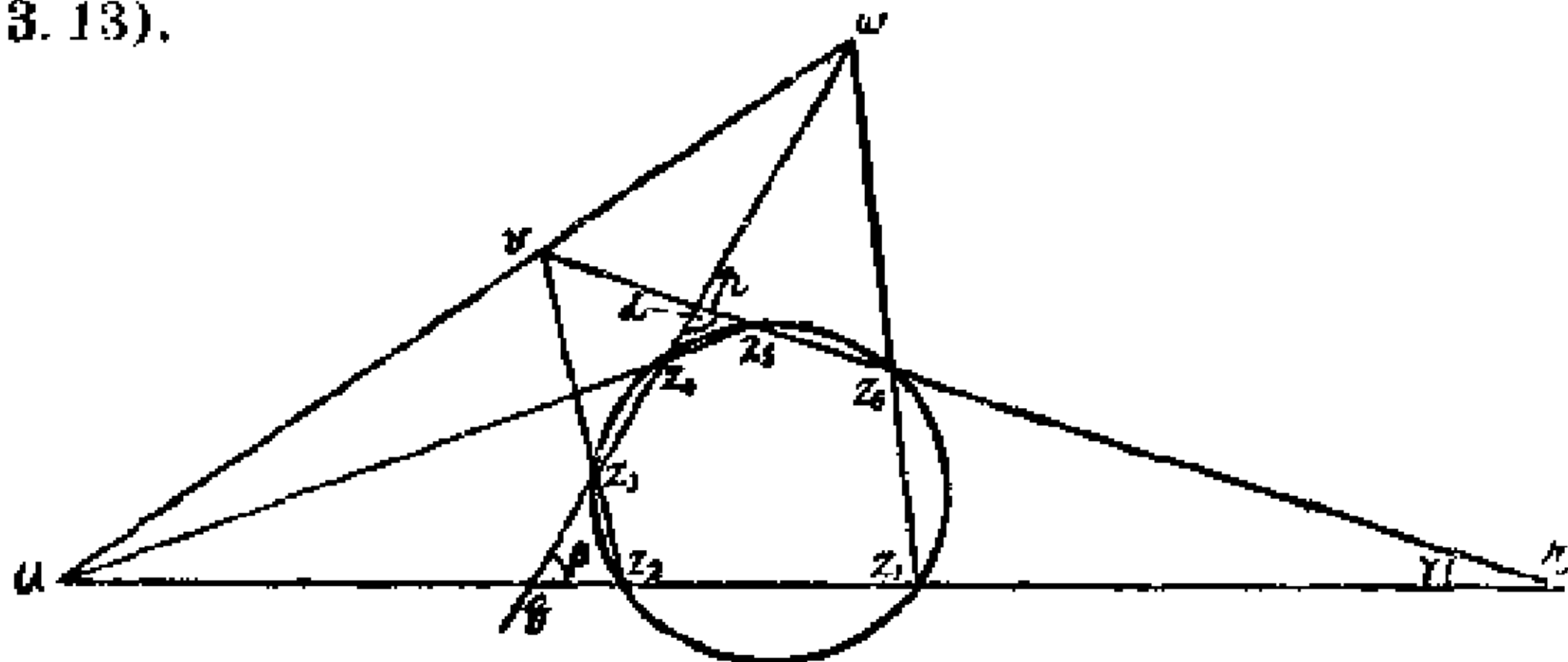


图 3.13

证 设圆内接六边形三双对边的交点为 u, v, w . 考察 $\triangle pqr$, 用 α, β, γ 记这三角形的三个内角, 由于 u, z_5, z_4 在 $\triangle pqr$ 的三边上而且共线, 依定理三便有

$$\frac{q-u}{r-u} \cdot \frac{r-z_5}{p-z_5} \cdot \frac{p-z_4}{q-z_4} = 1.$$

同理, 由于 v, z_3, z_2 共线和 w, z_1, z_6 共线, 又有

$$\frac{r-v}{p-v} \cdot \frac{p-z_3}{q-z_3} \cdot \frac{q-z_2}{r-z_2} = 1,$$

$$\frac{p-u}{q-u} \cdot \frac{q-z_1}{r-z_1} \cdot \frac{r-z_6}{p-z_6} = 1.$$

将以上三式相乘并整理后, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{q-u}{r-u} \cdot \frac{r-v}{p-v} \cdot \frac{p-w}{q-w} \cdot \left[\frac{(p-z_3)(p-z_4)}{(p-z_5)(p-z_6)} \right] \\ & \cdot \left[\frac{(q-z_1)(q-z_2)}{(q-z_3)(q-z_4)} \right] \cdot \left[\frac{(r-z_5)(r-z_6)}{(r-z_1)(r-z_2)} \right] = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

但因 z_3, z_4, z_5, z_6 共圆, 利用 2° 最后的条件可知

$$\frac{(p-z_3)(p-z_4)}{(p-z_5)(p-z_6)} = e^{-i2\alpha},$$

同理还有

$$\frac{(q-z_1)(q-z_2)}{(q-z_3)(q-z_4)} = e^{-i2\beta},$$

$$\frac{(r-z_5)(r-z_6)}{(r-z_1)(r-z_2)} = e^{-i2\gamma}.$$

将以上三式相乘的乘积是

$$e^{-2(\alpha+\beta+\gamma)i} = e^{-2\pi i} = 1.$$

故(10)可写为

$$\frac{q-u}{r-u} \cdot \frac{r-v}{p-v} \cdot \frac{p-w}{q-w} = 1.$$

即 u, v, w 三点共线.

第三节的习题

1. 设 m 为平行四边形 $abcd$ 的底边的中点, 命 dm 与 ac 交于 h , 求证



(第 1 題)

$$\vec{ah} = \frac{1}{3}\vec{ac},$$

2. 設在 z_1, z_2, \dots, z_n 这 n 个点处各放置一个质量为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 的质点, 求证这一质点組的重心是

$$\frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}.$$

3. 設 z_1, z_2, \dots, z_n 为一凸 n 边形的頂点, 求证滿足关系式

$$\frac{1}{z_1 - a} + \frac{1}{z_2 - a} + \dots + \frac{1}{z_n - a} = 0$$

的复数 a 必在此凸 n 边形的内部.

4. 設 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$, 求证由四点 z_1, z_2, z_3, z_4 的所有可能的排列而构成的交比的值只有下列六种:

$$\lambda, 1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

5. 設 z_1, z_2, z_3, z_4 为內接于一圆的四边形的連續的四个頂点, 证明

$$|z_1 - z_3| |z_2 - z_4| = |z_1 - z_2| |z_3 - z_4| + |z_2 - z_3| |z_1 - z_4|,$$

并对此公式作几何解釋.

6. 以 $\triangle z_1 z_2 z_3$ 的各边向外作正三角形, 求证这三个正三角形的重心也成为一個正三角形的三个頂点.

7. 求证三角形的三条分角綫共点.

四 圓族

在第三节中已經看到, 比值 $\frac{z-a}{z-b}$ 具有重要的意义: 当 a, b 是两个不同的复数, 让 z 在复平面上变动而永远使这比值保持实数值时, 点 z 描画出的正是連結 a, b 两点的直綫.

现在我们进一步来討論这个比值, 为簡便計, 我們引入記号

$$(z, ab) \equiv \frac{z-a}{z-b}$$

現在問：

i) 当 z 在平面上运动而使

$$\arg(z, ab) = \theta, \quad (\theta \text{ 为一实常数})$$

这时 z 描画出什么曲线？

ii) 当 z 在平面上运动而使

$$|(z, ab)| = \lambda, \quad (\lambda \text{ 为一正数})$$

这时 z 描画出什么曲线？

1° 由于 $\arg(z, ab)$ 是向量 \vec{bz} 到 \vec{az} 的夹角，因此，满足 $\arg(z, ab) = \theta$ 的点 z 描画出来的曲线是以 a, b 的连线为弦的一段圆弧（图 4.1），而另一段圆弧上的点 z' 则适合

$$\arg(z', ab) = -\pi + \theta.$$

以 a, b 的连线为轴，把上述圆周对称地翻过来，又得到一个（用虚线画出的）圆周。不难看出，这个圆周上的两段弧分别是满足条件

$$\arg(z, ab) = -\theta; \quad \arg(z, ab) = \pi - \theta$$

的点 z 的轨迹。因此 当 θ 取定 0 与 π 之间的任一值时，两组条件

$$\arg(z, ab) = \begin{cases} \theta \\ -(\pi - \theta) \end{cases}, \quad \arg(z, ab) = \begin{cases} -\theta \\ \pi - \theta \end{cases}$$

分别表示了两个一样大小的圆周，它们的位置关于 a, b 的连

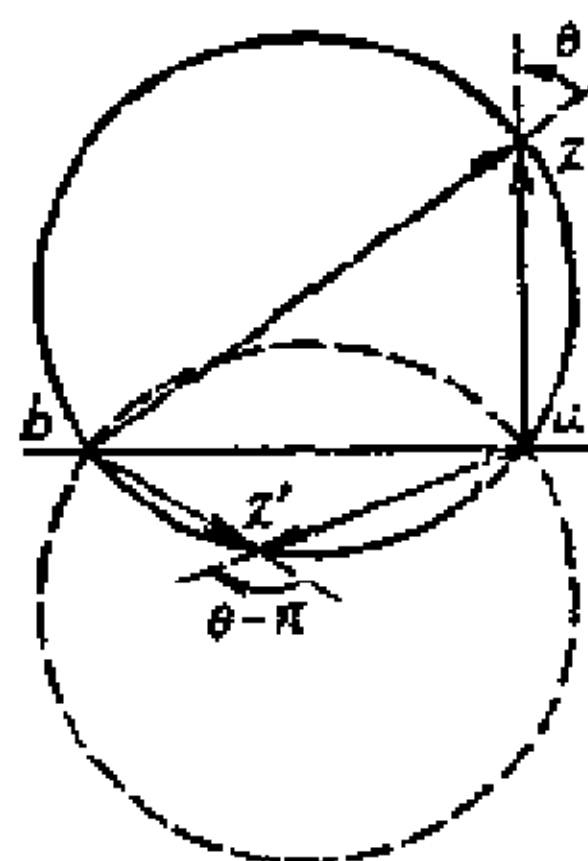


图 4.1

綫是对称的. 特別当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 上述两个圆周合成一个, 即那个以 a, b 两点为同一直径的两端的圆周. 当 $\theta = 0$ 或 π 时, $(z, ab) = \text{实数}$, 从而 z 的軌迹就是过 a, b 两点的直綫: 当 $\arg(z, ab) = 0$ 时, 点 z 描出的是直綫的在 a, b 之外的那部分; 而当 $\arg(z, ab) = \pi$ 时, 点 z 描出 a, b 之間的那条直綫段.

总起来說, 当 θ 取 $-\pi$ 到 π 之間的不同值时, 滿足条件 $\arg(z, ab) = \theta$ 的点 z 的軌迹是許許多多的圆周和一条过 a, b 的直綫——我們称它們組成一个圓族, 这个圓族中的每一个成員都通过 a, b 两点. 應該注意的是, 对于其中的每一个成員, 都必須在 a, b 两点处分开成两段圓弧, 每段圓弧对应于 θ 的一个实数值.

2° 現在再来看滿足条件

$$|(z, ab)| = \lambda$$

的点 z 描出什么曲綫. 先看 $\lambda = 1$, 这时有

$$|z - a| = |z - b|,$$

这就是說点 z 运动时永远保持与 a, b 两点有相等的距离. 从平面几何知道, 点 z 描出的正是 a, b 两点連綫的垂直平分綫. 再看 $\lambda \neq 1$, 先設 $0 < \lambda < 1$, 这时由 $|(z, ab)| = \lambda < 1$ 可知

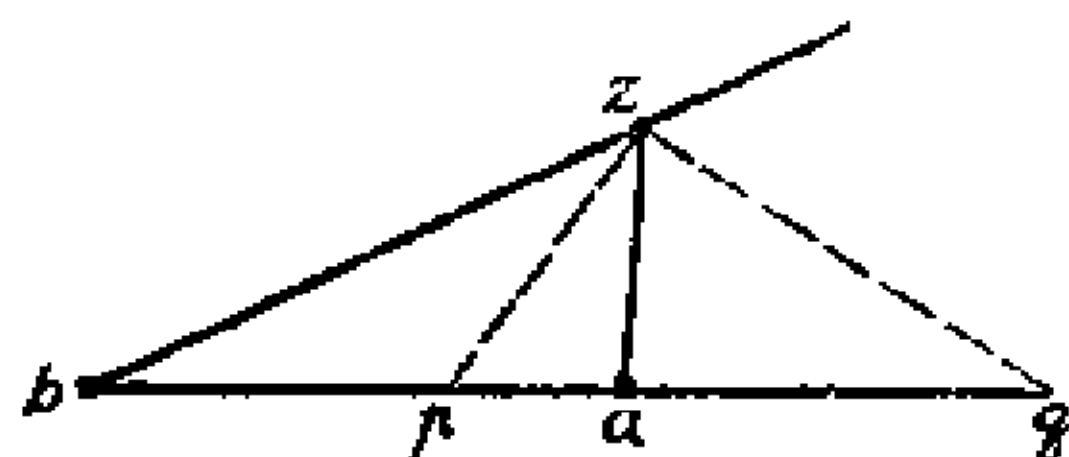


图 4.2

$|z - a| < |z - b|$, 这說明动点 z 到 a 的距离比它到 b 的距离近些, 从而点 z 只能在被 a, b 連綫的垂直平分綫分割开的两張半平面中 a 所在

的那張半平面內變動。我們任取一適合 $|(z, ab)| = \lambda (< 1)$ 的点 z ，并将 a, b, z 連成一个三角形 (图 4. 2)。作 $\angle azb$ 的內、外分角綫，分別交对边于 p, q 两点。由平面几何可知

$$\frac{\|\vec{ap}\|}{\|\vec{pb}\|} = \frac{\|\vec{az}\|}{\|\vec{bz}\|}; \quad \frac{\|\vec{aq}\|}{\|\vec{qb}\|} = \frac{\|\vec{az}\|}{\|\vec{bz}\|}.$$

但是

$$\frac{\|\vec{az}\|}{\|\vec{bz}\|} = \frac{|z-a|}{|z-b|} = |(z, ab)| = \lambda,$$

所以

$$\frac{p-a}{b-p} = \lambda; \quad \frac{q-a}{b-q} = -\lambda.$$

由此可以解出

$$p = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}, \quad q = \frac{a + (-\lambda)b}{1 + (-\lambda)}.$$

这两个等式表明 p 与 q 分別是 a, b 連綫按 $1:\lambda$ 的內分点与外分点，它們由 a, b 及 λ 完全确定，根本与 z 无关。注意 $\angle pzq = \frac{\pi}{2}$ ，可知 z 是在以 p, q 两点的連結綫段作直徑的圓周上。反推过去也能证明，只要点 z 在这个圓周上，就能使 $|(z, ab)| = \lambda$ 。

这个圓周的中心是

$$\frac{1}{2}(p + q) = \frac{a + \lambda^2 b}{1 - \lambda^2}, \quad (1)$$

而半徑是

$$\frac{1}{2}|p - q| = \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} |a - b|. \quad (2)$$

从(1)式可以看出，此圆的中心是 a, b 连线按 $1:\lambda^2$ 的外分点，而且位于 a 的外边。当 λ 在 0 与 1 之间每取定一值时，就得到一个圆周；当 λ 取不同的数值时，就得出不同的圆周。现在来观察(1)式及(2)式，看看当数值 λ 在 0 与 1 之间变动时，这许多圆周中心的位置和半径的大小将如何变化？ $\lambda=0$ 时只有 $z=a$ ，这时圆周退缩成了一点。当 λ 渐渐增大而接近 1 时，第三节的 1° 关于定比分点的讨论告诉我们，圆周与 a, b 连线的一个交点 P 将自右向左移动，而渐渐接近 a, b 连线的中点；另一交点 Q 将自左向右移向远处。这正说明，当 λ 从 0

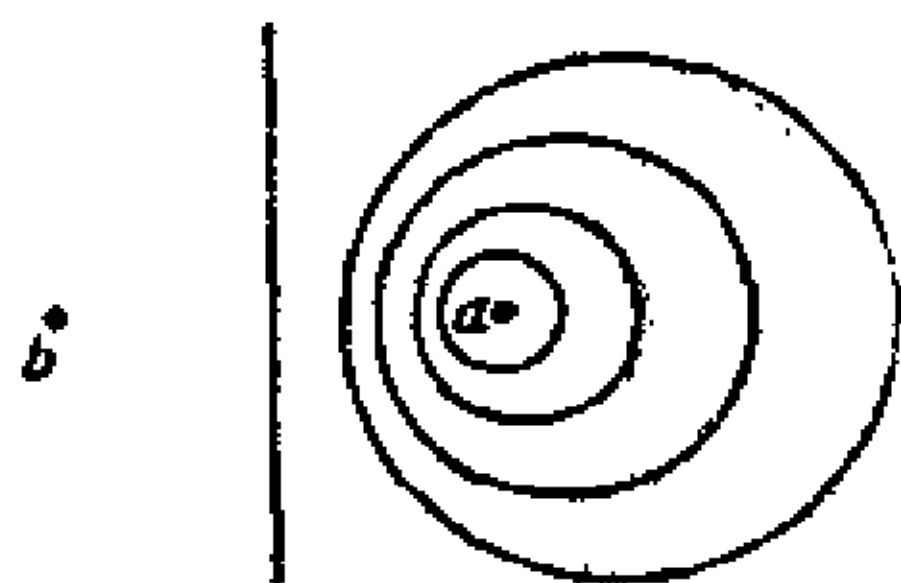


图 4.3

增加而渐近于 1 时，圆的半径也渐渐增大，并且，对应于较大的 λ 值的圆周总把对应于较小的值的圆周包围在内部。当 λ 充分接近 1 时，这时圆心离 a 可以充分远，而它的半径也充分大。当 $\lambda=1$ 时，轨迹已不再是一个真正的圆周，而变成 a, b 连线的中垂线了(图 4.3)。

对于 $\lambda>1$ 的情形，我们不需要重新作讨论了。因为，令 $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ ，由 $|(z, ab)| = \lambda$ 可知 $|(z, ba)| = \lambda' < 1$ ，这时如果我们书的纸张是洁白透明的话，读者从背面对着太阳光来看图 4.3，那末 b 点就到前面讨论中 a 的位置上去了，于是前面的讨论不加任何修改便可应用于新的情况。当 λ 从 1 起无限增大时(也就是 λ' 从 1 无限减小而接近于零时)，这时这些圆周的

漸減小，如果認為 $\lambda' = 0$ 對應着 $\lambda = +\infty$ ，就可以說 $\lambda = +\infty$ 就決定了 b 點。

從上述的討論中可以看出，條件

$$|(z, ab)| = \lambda \text{ 与 } |(z, ab)| = \frac{1}{\lambda}$$

所決定的是兩個同樣大小的圓周，它們的位置關於 a, b 連線的中垂線是對稱的。

總起來說，適合條件 $|(z, ab)| = \lambda$ ($0 < \lambda < +\infty$) 的點的軌迹是一個圓周，當 λ 取不同值時，便得到許許多多的圓周（當 $\lambda = 1$ 時對應着一條直線），於是我們又得到了一個圓族。當 λ 取定一個正數值時，就得到這圓族中的一個成員。對着圖 4.4 我們總括地描述這個圓族中的成員隨 λ 的值變化的情況： $\lambda = 0$ 時，圓退縮成一點 a ；當 λ 從 0 增加到 1 時，圓的中心在 a, b 的連線上遠離 a 點向遠處移動，半徑也越來越大，當 $\lambda = 1$ 時，這些很大很大的圓周好像被拉破而成了一個“半徑等於無限大的圓周”——即 a, b 連線的中垂線。當 λ 突破 1 而繼續增大時，圓周就跑到左半平面上來了，而且圓的半徑開始縮小，圓心則在 a, b 連線上左邊很遠很遠的地方開始向 b

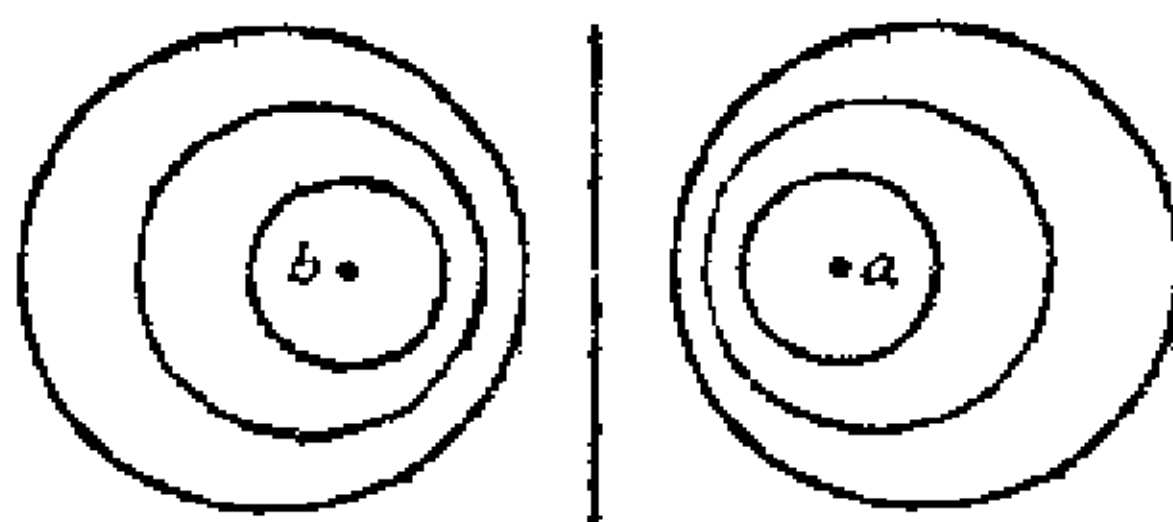


圖 4.4

第 1 章

走近, 当 λ 的值充分大时, 中心就可以离 b 充分近. 最后, 我們可以认为 b 这一点对应着 $\lambda = +\infty$.

3° 在上面, 我們已經很詳細地分別討論了两个圓族, 即

$$\arg(z, ab) = \theta \text{ 与 } |(z, ab)| = \lambda$$

但是这两个圓族之間有什么样的几何关联, 却还没有討論到. 現在来从事这一工作.

由 2° 中公式(1)可以算出

$$\left| a - \frac{1}{2}(p+q) \right| \left| b - \frac{1}{2}(p+q) \right| = \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2} |a-b| \right)^2.$$

这一等式說明, a, b 两点到圓周 $|(z, ab)| = \lambda (< 1)$ 的中心的距离的乘积等于此圓半径的平方, 同时 a, b 两点又同在这圓周的一条半径的射綫上. 凡是适合上述条件的一对点都称为关于这个圓周的对称点. 从而上述結論表明, 对于 $\lambda \neq 1$, 每一圓周都以两定点 a, b 为对称点. 为了这种說法对 $\lambda = 1$ 也适用, 只須規定关于直綫的一对对称点是指以此直綫为它們

之間的中垂綫的那樣一对点. 关于对称点, 我們可以建立重要的

定理五 两点 a, b 是某一圓周 Γ 的一对对称点的必要充分条件是: 通过 a, b 两点的圓族中的每一成員都与 Γ 正交——即在两圓相交处有互相垂直的切綫.

证 i) 必要性

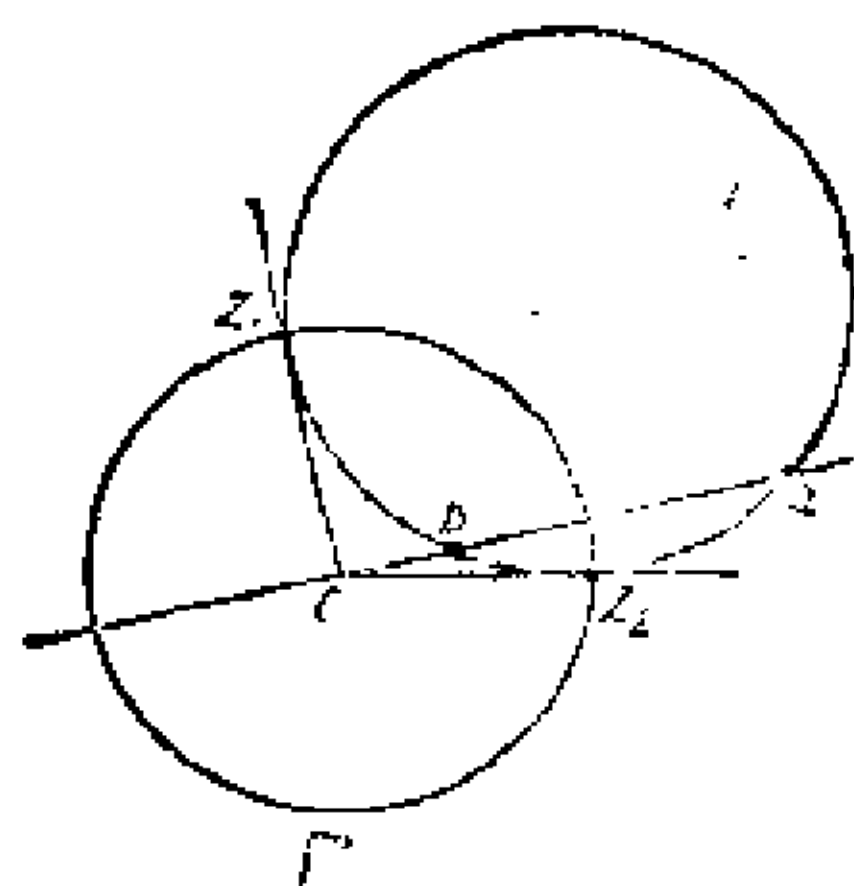


图 1.5

設 a, b 是某一以 c 点为中心的圓周 Γ 的一对对称点, 而
过 a, b 两点的某一圓周与 Γ 相交于 z_1, z_2 两点(图 4.5), 于是

$$\|\vec{ac}\| \|\vec{bc}\| = \|\vec{cz_1}\|^2 = \|\vec{cz_2}\|^2.$$

平面几何告訴我們, 这只有当 $\vec{cz_1}, \vec{cz_2}$ 是另一圓周的切綫时才
有可能, 这正說明两圓在交点处有互相垂直的切綫, 即这两个
圓周正交.

ii) 充分性

設过 a, b 的圓族中一切成員都与某一中心在 c 点的定圓
 Γ 正交. 因为 a, b 的連綫也是这圓族中成員之一, 从而它与 Γ
正交, 故此直綫过該圓的中心 c (图 4.5). 另取圓族中任一
个圓周, 并設它与 Γ 交于 z_1, z_2 两点, 由于此两圓的正交性, 可
知 $\vec{cz_1}$ 是一圓周的切綫, 依平面几何中的一个定理, 便得:

$$\|\vec{ac}\| \|\vec{bc}\| = \|\vec{cz_1}\|^2$$

因 $\|\vec{cz_1}\|$ 是 Γ 的半徑, 故上式正是說 a, b 是 Γ 的一对对称点.

利用定理五便可以說明两个圓族 $\arg(z, ab) = \theta$ 与 $|(z,$
 $ab)| = \lambda$ 之間的几何关系了. 因为我們知道, 圓族 $\arg(z, ab)$

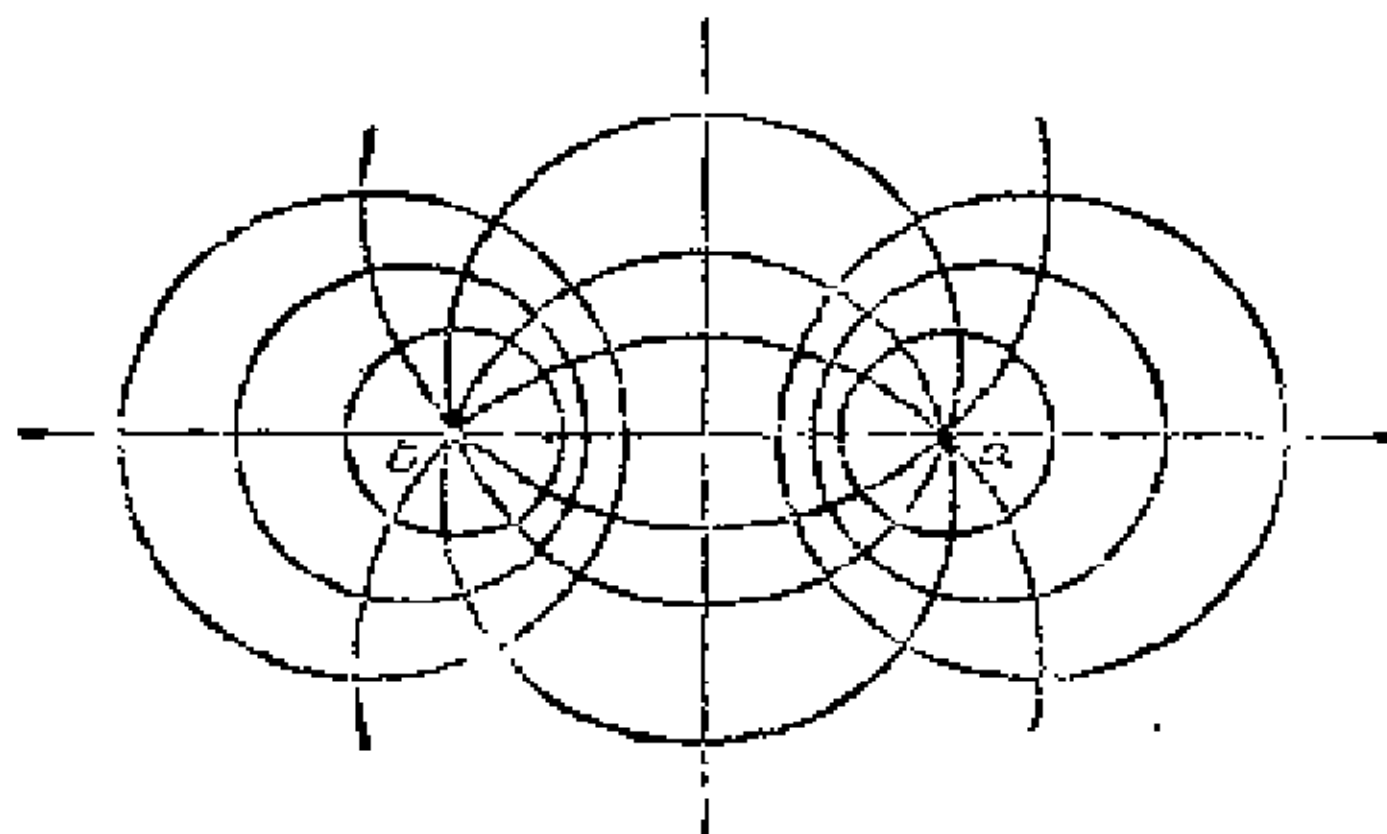


图 4.5

$=\theta$ 的每一成員都是通過 a, b 兩點的, 而 $|(z, ab)|=\lambda$ 的每一成員都是以 a, b 作為一對對稱點的, 依定理五, 可知當我們把這兩個圓族畫在同一張圖上的時候, 便可看到, 隨便從這兩個圓族中各挑出一個成員來, 它們都是正交的(圖 4. 6).

第四节的习题

1. 作圓周

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

的图形, 并求出它的中心和半徑.

2. 求圓周

$$\arg\left(\frac{z-i}{z+1}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$$

的中心和半徑, 并作出图形.

3. 求圓周

$$\left|\frac{z-(1+i)}{z-2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{及} \quad \left|\frac{z-(1+i)}{z-2}\right|=\sqrt{2}$$

的中心和半徑, 并作出图形.

4. 画出圓周 $|z|^2=2R(z)$ 及 $|z|^2=2I(z)$, 证明它們互相正交

5. 設 z 与 z^* 是关于单位圓的一對對稱點, 求证

$$z^*=\frac{1}{\bar{z}}.$$

6. 設 z 与 z^* 是关于圓周 $|z-a|=\rho$ 的一對對稱點, 求证

$$z^*=a+\frac{\rho^2}{\bar{z}-\bar{a}}.$$

五 分式綫性变換

在小册子的第一节里, 我們就提出了复平面的概念, 即在

平面上表示复数，为了后面的讨论能顺利地进行，现在首先要将复数表示到球面上去。

1° 以复平面的原点 O 为中心、1 为半径作一个球，它的南极用 S 表示，北极用 N 表示（图 5.1），复平面与这个球交

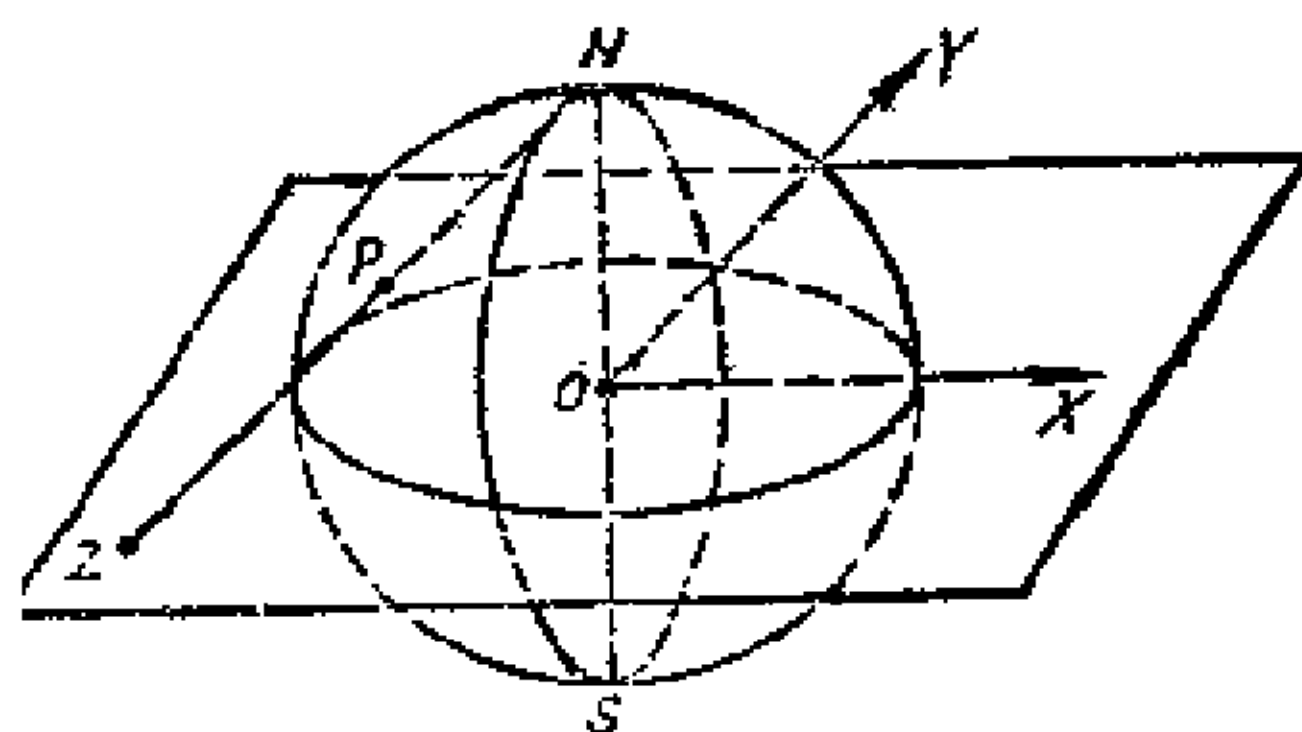


图 5.1

出的那个大圆，称为赤道，和赤道平面平行的平面与球面交出的那些圆，称为纬线，而通过南北极的平面与球面交出的那些大圆则叫做经线。

设在复平面上有一复数 z ，我们将 z 与北极 N 连结成一条直线，这条直线除了 N 之外只能与球面交于一点 P （图 5.1）。反过来，球面上除了 N 以外的每一点 P ，当把 N, P 连结成一条直线后，将在一点 z 处刺破复平面。我们将 z 沿着这条直线移植到球面上的 P 点处，就得到了复数 z 的球面表示。采用这个办法，就使复平面上的一切点同球面上除去北极 N 之外的一切点之间建立了一个一一对应。例如，复平面的原点 O 对应着南极 S ；复平面上的单位圆上的每一点对应的是赤道上那些有相同位置的点；单位圆内部的一切点与南半球的一

切点之间建立了一一对应；单位圆外的一切点与北半球上除了 N 之外的一切点之间建立了一一对应。

唯一显得特殊的是球面上的北极 N ，它在复平面上无法找到它的对应点。为了消除这一特殊性，经过一些简单的分析后，我们便能为它找到一个“理想的”对应点来。首先注意，复平面上任一以原点为中心的圆周移植到球面上去都在同一条纬线上：半径小于 1 的圆周移植上去是南纬线；半径大于 1 的圆周移植上去是北纬线（图 5.2），而且半径越大，纬度愈

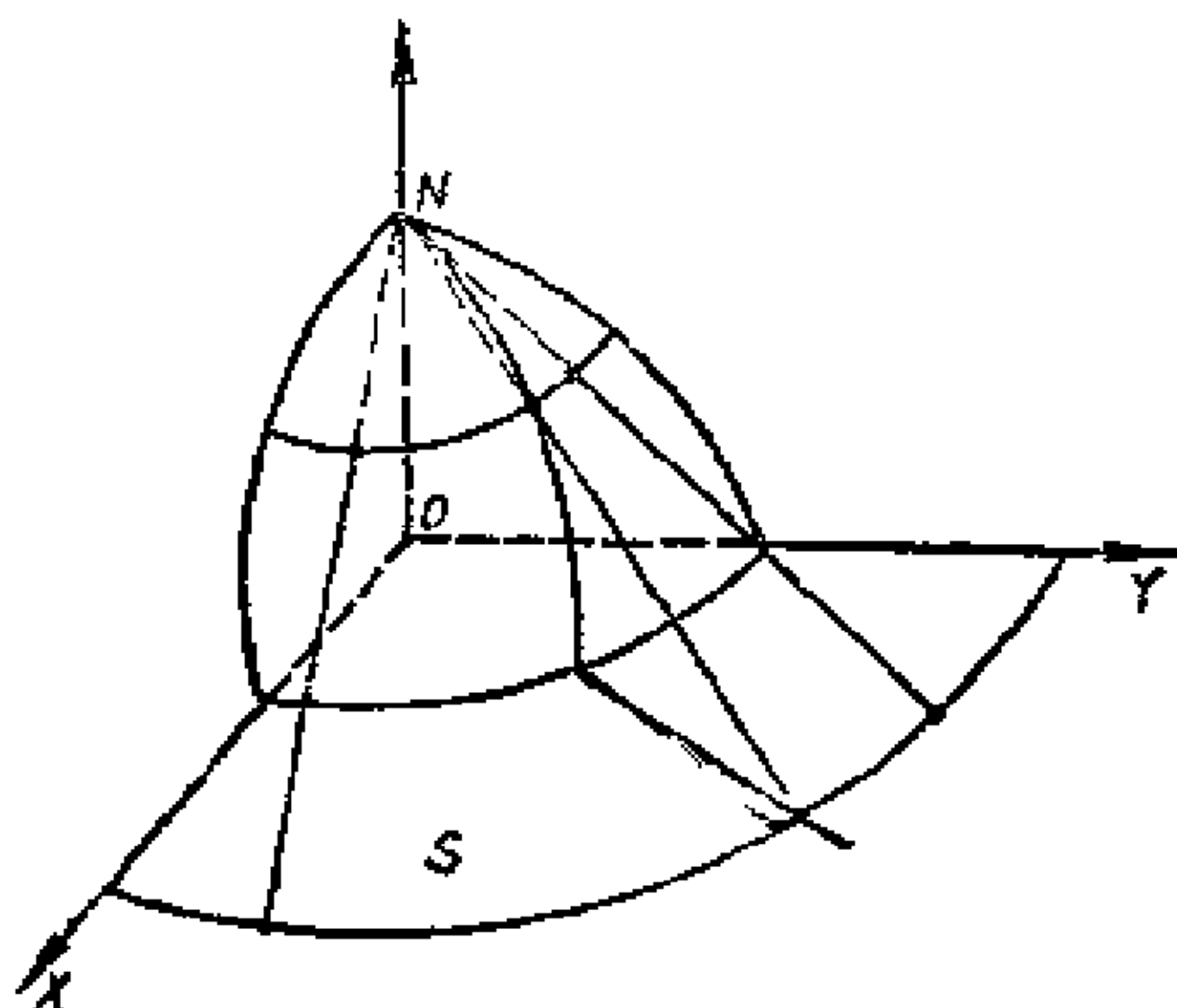


图 5.2

高，圆周外面的点移植上去都在这条纬线以北。当这些圆的半径越来越大时，复平面上任何一点都有被盖住的时刻，而此时球面上的纬线越来越向北极缩小，只有北极 N 一点永远留在一切纬线的北面。这样看来，只有这样的“点”才有资格作为 N 的对应点，它到原点的距离比复平面上任何一点到原点的距离更远，这个理想的点就称为无穷远点，用记号 ∞ 来表示

它。这样我们就给北极 N 找到了一个对应点，即 ∞ 。其次，还应当看到，复平面上位于一条从原点出发的半射线上的复数 z ，移植到球面上都落在同一条经线上（图 5.2）。而且 z 离原点越远，它在球面上对应的点 P 就离北极越近。这个结论与复平面上的半射线的方向无关，就是说，不论朝哪个方向出发的半射线，它上面的点无限远离原点而运动时，与它对应的球面上的点都将向北极无限接近。这个事实可以帮助我们清除这样一种似是而非的想法，即认为每一条从原点出发的半射线上都有一个无穷远点。总起来说，正确的理解应该是：复平面上的无穷远点只有一个，那就是到原点的距离超过复平面上任一点到原点的距离的那一“点”，就是沿着平面上每一条自原点出发的半射线无限远离原点而运动时，最后殊途同归的那一“点”，就是与球面上的北极 N 相对应的那一“点”。引入了无穷远点 ∞ 之后的复平面，称为扩大复平面。

大家会问，引入无穷远点的概念是否单单为了给北极 N 找到对应点而没有其他的好处呢？不是的。引入这一概念会使今后的叙述变得简洁和统一。这里先举两个例子说明一下。大家已经知道，复平面上过原点的直线移植到球面上去是经线（这是通过北极的球面圆周）。不难看出，复平面上任一条直线移植到球面上去就是过北极 N 又包含此直线的平面与球面的交线——即一个通过北极的球面圆周。复平面上以原点为中心的圆周移植到球面上去是纬线（这是不通过北极的球面圆周），用空间解析几何的方法还可以证明（这里从略），复平面上中心随便在什么地方的一个圆周，移植到球面上去

总是一个不通过北极的球面圆周。由此可見，复平面上不論直綫也好，圓周也好，移植到球面上去都是球面圓周，唯一的区别在于，对应于直綫的球面圓周必过北极，而对应于圓周的球面圓周一定不通过北极。这样，在扩大复平面上，我們就可以把圓周和直綫統称圓周。这是因为它們移植到球面上去之后都是球面圓周的緣故；还可以說直綫是通过无穷远点的圓周，因为它移植到球面上去的球面圓周都通过北极 N ，而 N 又是和扩大复平面的无穷远点 ∞ 对应着的。

現在再来看第二个例子，在第四节，曾引进过关于一个

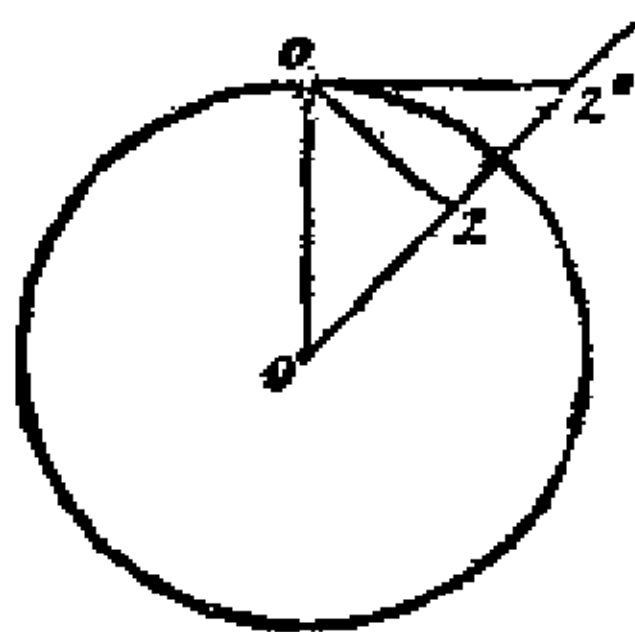


图 5.3

圓周的一对对称点的概念。現在来介

紹对称点的几何作图法，为简单起见，

設圓周为单位圓，即中心在原点半徑

等于1的圓周。設 z 是圓内一点，过

O 与 z 連起一条射綫，过 z 作垂直于

此射綫的直綫交单位圓周于 a ，再过

a 作圓周的切綫交射綫于 z^* (图 5.

3)，我們說 z 与 z^* 就是一对关于单位圓的对称点，证明如下：

由于

$$\triangle Oza \sim \triangle Oaz^*,$$

故

$$\frac{|\overrightarrow{Oz}|}{|\overrightarrow{Oa}|} = \frac{|\overrightarrow{Oa}|}{|\overrightarrow{Oz^*}|},$$

亦

$$|\overrightarrow{Oz}| |\overrightarrow{Oz^*}| = |\overrightarrow{Oa}|^2 = 1.$$

这正说明 z 与 z^* 是关于单位圆的一对对称点。由作图法可见，凡是单位圆内除原点之外的任一点，都有一个关于单位圆的对称点，而且可以用上述方法作出来。唯一显得特殊的是圆心 O ，它在单位圆外是找不到对称点的，因为在这时 $z=0$ ，从而 $|\vec{Oz}|=0$ ，不论 z^* 是什么点，等式 $|\vec{Oz}||\vec{Oz^*}|=1$ 是不可能成立的。现在让 z 沿着同一条半径向圆心接近，由上述的关于 z^* 的作法可知 z^* 也在这条半径的延长线上变动，由等式 $|\vec{Oz^*}| = \frac{1}{|\vec{Oz}|}$ 可以看出，当 z 越靠近原点时，即 $|\vec{Oz}|$ 越小

时， $|\vec{Oz^*}|$ 就越大，从而 z^* 离原点就越远，这也可以设想成 z^* 离无穷远点越近。有了这些分析之后，我们看到，合理的做法是将 O 与 ∞ 看成是关于单位圆的一对对称点。这样一来，在扩大复平面上，每一个点都有一个关于单位圆的对称点。

顺便提一下，对于任何圆周，对称点的几何作图法与上述关于单位圆的叙述没有两样，此时把圆心同 ∞ 看成是一对对称点。

2° 现在来讨论整线性变换 $w = az + b$ 。首先，我们通过一些例子来说明变换的概念。

i) 考察式子

$$w = z + b, \quad (1)$$

这里 b 是某一固定的复数， z 可以取任何复数。当 z 取定一复数代入上式右边后，便可算出另一复数 w 。我们说(1)表示一个变换，它把点 z 变成了 w ，并称 w 是 z 的像。例如取 $b = 1 + i$ ，则在变换 $w = z + (1 + i)$ 之下， $-3 + i$ 的像是 $-2 + 2i$ ；

0 的像是 $1+i$, $-1-i$ 的像是 0, 等等(图 5.4).

根据第一节所叙述的复数加法的几何解释, 很容易说明变换(1)的几何意义: 在(1)之下, 复平面每一点 z 的像 w , 都是把 z 平行移动同一向量 b 而得到. 这个变换总的后果正像把整个复平面移动了向量 b 一样(图 5.5), 所以变换(1)常称为平移.

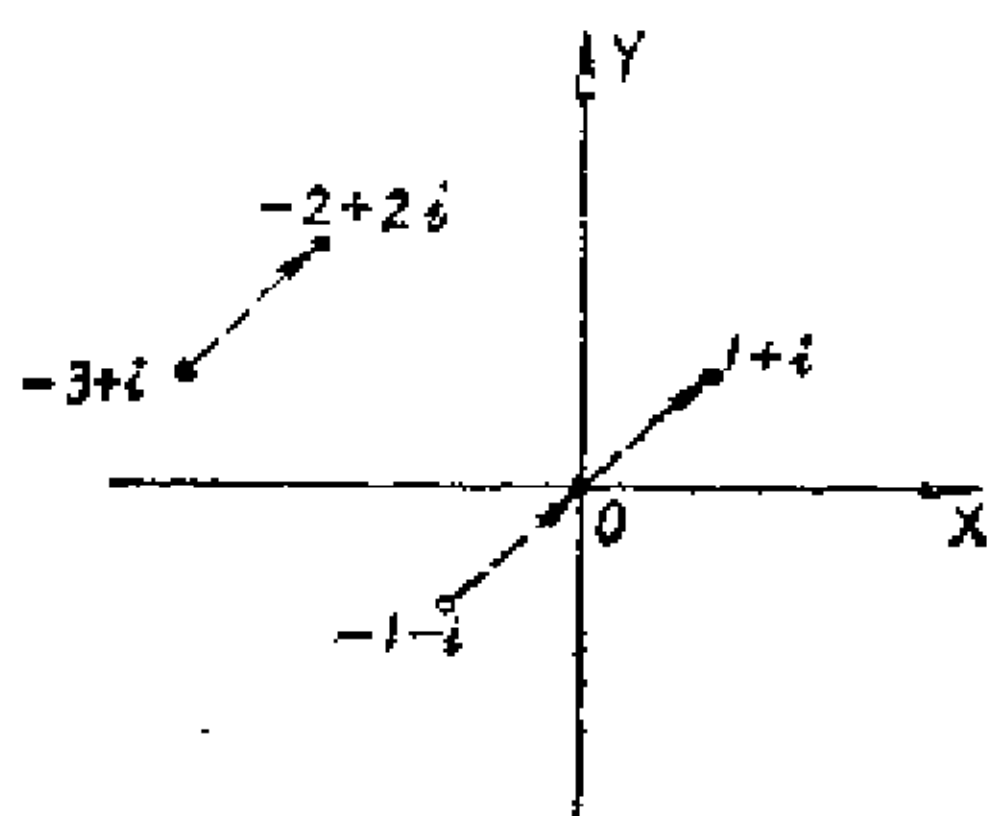


图 5.4

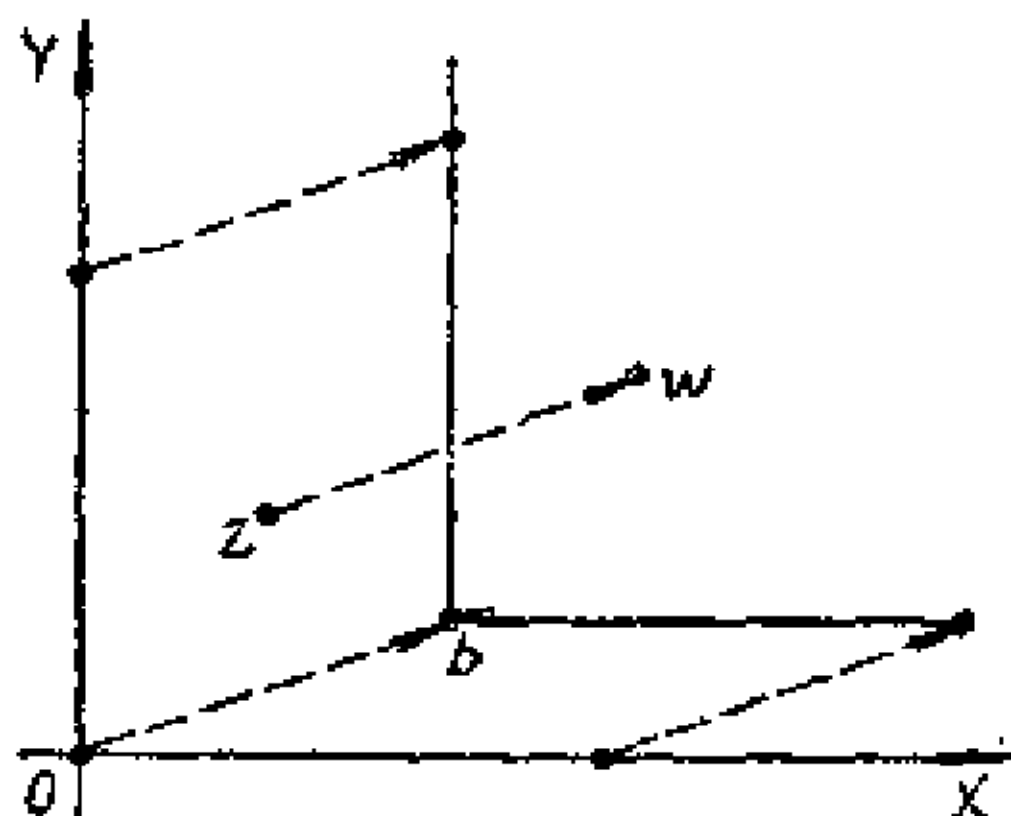


图 5.5

ii) 再看等式

$$w = ze^{i\theta}, \quad (2)$$

这里 θ 是某一给定的实数, z 可以取任何复数. 当取定 z 而

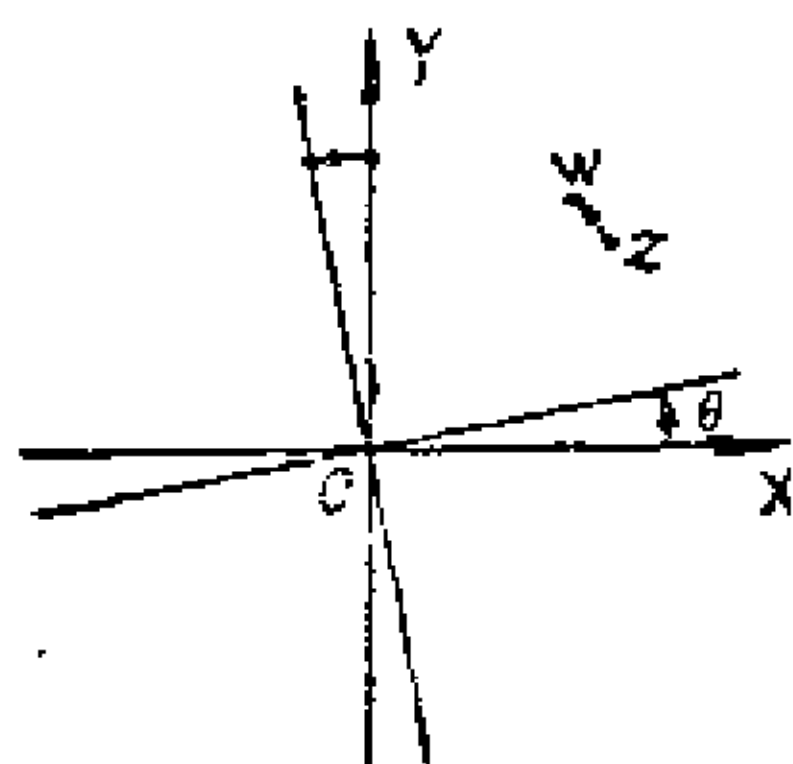


图 5.6

代入(2)式右方后, 便可算出另一复数 w , 这时说(2)式表示一个变换, 它把 z 变成了 w , w 也称为 z 的像. 根据第一节中所述的用 $e^{i\theta}$ 乘另一复数的几何解释可知: 在变换(2)之下复平面上每一点 z 的像 w 都是把 z 绕着原点向反时

针方向转 θ 角而得. 这个变换总的后果正像把整个复平面绕着原点旋转了 θ 角一样(图 5.6), 所以变换(2)常称为**旋转**.

iii) 最后来讨论等式

$$w = \rho z, \quad (3)$$

这里 ρ 是某一固定的正数, z 可以取任何复数值. 根据第一节中所述的用正数 ρ 去乘另一复数 z 的几何解释可知: 每一向量经过变换(3)之后方向不变, 但长度为原长的 ρ 倍. 变换(3)常称为**相似变换**.

分别地讨论过上述三种变换之后, 就可以来考虑一般的**整线性变换**

$$w = az + b, \quad (4)$$

其中 $a \neq 0$, b 为某两个固定的复数, z 可以取任何复数. 当 z 取定而代入(4)的右方后便可算出另一个复数 w , 它称为在变换(4)之下点 z 的像. 现在来证明, 变换(4)可以分解成(1)、(2)、(3)三种最简单的变换连续进行的结果. 令 $a = \rho e^{i\theta}$, 顺次将三式

$$z_1 = \rho z,$$

$$z_2 = z_1 e^{i\theta}$$

$$w = z_2 + b$$

中的前一式代入后一式的右端, 最后便得到 $w = \rho e^{i\theta} z + b = az + b$, 而上面三式正是已讨论过的三种变换.

现在来指出变换(4)的一个性质, 在一条直线上的点经过变换之后仍在一条直线上, 在一个圆周上的点经过变换之后仍在在一个圆周上. 我们把这个性质简述为: (4) 把直线变

成直綫，把圓周變成圓周。由于上面已經証明(4)可分解为三种簡單的变换連續进行的結果，所以只須証明这三种变换中的每一种都具有上述性质就足够了。根据平移和旋轉的几何意义容易看出，它們确实具有所述的性质。剩下来只須証明，相似变换(3)也具有这一性质。首先，設 z_1, z_2 在(3)之下的像分別是 w_1, w_2 ，即 $w_1 = \rho z_1, w_2 = \rho z_2$ ，于是

$$w_2 - w_1 = \rho(z_2 - z_1),$$

这表明向量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 与 $\overrightarrow{w_1 w_2}$ 方向相同，由此可知，(3)把直綫变成与原直綫平行的直綫。其次設 z 是以 a 为中心、以 λ 为半徑的圓周上的任一点，即 $|z - a| = \lambda$ ，于是 z 的像 $w = \rho z$ 便适合等式

$$|w - \rho a| = \lambda \rho,$$

这正說明 w 在以 ρa 为中心、 $\lambda \rho$ 为半徑的圓周上。由此可知(3)把圓周仍变成圓周。

总结以上所述，便可以写出結論：**整綫性变换 $w = az + b$ 把直綫变成直綫，把圓周变成圓周。**

8° 进一步来討論分式綫性变换

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5)$$

其中 a, b, c, d 是四个給定的复数。如果 $c = 0$ ，当然 $d \neq 0$ ，此时(5)可写成

$$w = \left(\frac{a}{d}\right)z + \frac{b}{d},$$

当 $a \neq 0$ 时这正是一个整綫性变换，可見分式綫性变换是整綫

性变换的直接推广. 今设 $c \neq 0$ 而把(5)改写成

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}.$$

若 $ad - bc = 0$, 上式成为 $w = \frac{a}{c}$, 这式右边已不含 z , 故不是一个变换, 所以今后在讨论(5)时, 总设 a, b, c, d 满足 $ad - bc \neq 0$ 这一条件. 当 $z = -\frac{d}{c}$ 时, $cz + d = 0$, 这种点 z 当然不能代到(5)式右边去计算. 不过我们规定: (5)把 $-\frac{d}{c}$ 变成 ∞ , 而把 ∞ 变成了普通点 $\frac{a}{c}$. 这样一来, 变换(5)就可以看作扩大复平面上的一个变换.

在 2° 的结尾已经证明变换 $w = az + b$ 把直线变成直线, 把圆周变成圆周. 今将证明, 变换(5)也具有类似的性质, 精确地说, 变换(5)把直线和圆周变成直线或圆周. 如果我们对于圆周一词作广义的理解——如本节 1° 中所作的那样——即包含普通的圆周和直线在内, 那么这一性质仍可写成: 分式线性变换(5)把圆周变成圆周. 这个性质称为变换(5)的保圆性, 为了证明它, 还要先证明下面的定理.

定理六 分式线性变换保持交比不变. 就是说若 z_1, z_2, z_3, z_4 在(5)之下的像分别为 w_1, w_2, w_3, w_4 , 则有

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4).$$

证 因为

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_2 - w_3)}.$$

而

$$\begin{aligned} w_j - w_k &= \frac{az_j + b}{cz_j + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} \\ &= \frac{(ad - bc)(z_j - z_k)}{(cz_j + d)(cz_k + d)}. \end{aligned}$$

將此式中的 j, k 取相应的号码代入上式的右边，直接計算得

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

由这个定理可以导出許多重要的結論。

定理七 分式綫性变换把圓周仍变成圓周。

证 設 z_1, z_2, z_3 是某一圓周上的三个不同的点，它們在 (5) 之下的像分別是 w_1, w_2, w_3 。若 z 是 z_1, z_2, z_3 决定的圓周上的任一点，則依共圓条件，

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \text{实数}.$$

又設 (5) 把 z 变成了 w ，由定理六，

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3),$$

从而

$$(w, w_1, w_2, w_3) = \text{实数}.$$

这說明 z 的像 w 在由 w_1, w_2, w_3 所决定的圓周上。由此可以推知，变换 (5) 把圓周变成圓周。

对于定理七我們来作些补充說明，对于变换 (5) 來說，不通过点 $-\frac{d}{c}$ 的直綫和普通圓周，一定被 (5) 变成普通圓周；而通过点 $-\frac{d}{c}$ 的直綫，被 (5) 变成通过 $\frac{a}{c}$ 的直綫；通过点 $-\frac{d}{c}$ 的

普通圓周，則被(5)變成不通過 $\frac{a}{c}$ 的直綫。

設 Γ_1, Γ_2 是两个相交的圓周，由定理七知(5)把 Γ_1 變成了圓周 Γ'_1 ，把 Γ_2 變成了圓周 Γ'_2 ，并且 Γ'_1 与 Γ'_2 仍是相交的。在第三节 2° 中我們曾用交比定义过两个相交圓周間的夹角，現在我們来指出变换(5)的另一重要性质：保持圓周間的夹角不变。亦即： Γ_1 与 Γ_2 的夹角 = Γ'_1 与 Γ'_2 的夹角，这个性质，称为变换(5)的保角性。

定理八 分式綫性变换保持相交的两圓周之間的夹角不变。

证 設 z_3, z_4 为 Γ_1, Γ_2 的两个交点，而 z_1 是 Γ_1 上的另一点， z_2 是 Γ_2 上的另一点。依第三节 2° 中所证，应有

$$\Gamma_1 \text{ 与 } \Gamma_2 \text{ 的夹角} = \arg(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

又設在变换(5)之下， z_1, z_2, z_3, z_4 分別变成 w_1, w_2, w_3, w_4 ，由定理七知 w_1, w_3, w_4 在圓周 Γ'_1 上， w_2, w_3, w_4 在圓周 Γ'_2 上，于是

$$\Gamma'_1 \text{ 与 } \Gamma'_2 \text{ 的夹角} = \arg(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

但是依定理六 $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ ，从而这两个复数有相等的幅角，这正是說 Γ_1 与 Γ_2 的夹角 = Γ'_1 与 Γ'_2 的夹角。

在第四节 3° 中曾經給出过一个圓周的一对对称点的定义，現在設 Γ 为一圓周， z 与 z^* 是一对关于 Γ 的对称点，在变换(5)之下， Γ 變成了另一圓周 Γ' ，而 z 与 z^* 分別变成了 w 与 w^* ，很有兴趣的一件事是可以证明： w 与 w^* 正好

是一对关于圆周 Γ' 的对称点. 现在把这个性质写成

定理九 分式线性变换保持关于圆周的对称点.

证 在证明中主要用到第四节的定理五和变换 (5) 的保角性.

因为 z 与 z^* 是关于 Γ 的一对对称点, 从而通过 z 与 z^* 的一切圆周都与 Γ 正交. 在 (5) 之下, Γ 变成了 Γ' , 通过 z 与 z^* 的任一圆周变成了通过 w 与 w^* 的圆周, 而且通过 w 与 w^* 的任一圆周都是由通过 z 与 z^* 的圆周变来的. 由于 (5) 的保角性, 知通过 w 与 w^* 的任一圆周都是与 Γ' 正交的, 再利用定理五, 得知 w 与 w^* 是关于圆周 Γ' 的一对对称点.

利用分式线性变换这一系列性质重新来讨论圆族 $\arg(z, ab) = \theta$, $|(z, ab)| = \lambda$, 我们发现现在要得出第四节的一切结论会比那里简捷到无法比拟的地步. 令 $w = (z, ab) = \frac{z-a}{z-b}$, 则这是一个线性分式变换. 满足 $\arg(z, ab) = \theta$ 的点 z 在这个变换下的像 w 必满足 $\arg w = \theta$, 这种 w 的全体组成由原点出发的、与实轴正方向夹角为 θ 的半射线, 要对应于 θ 及

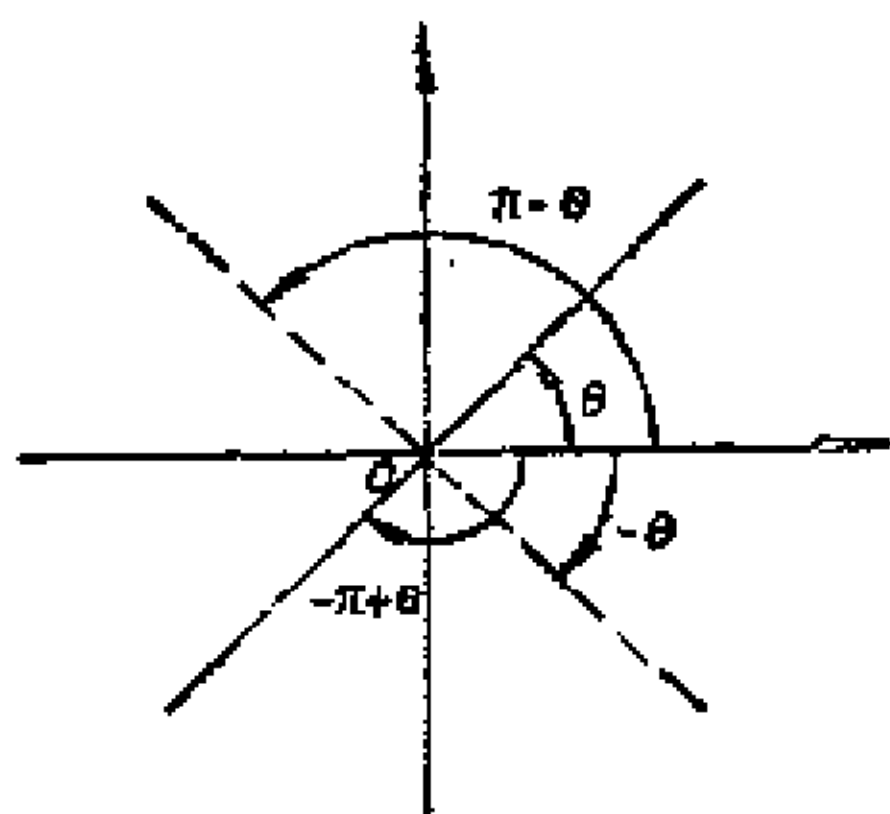


图 5.7

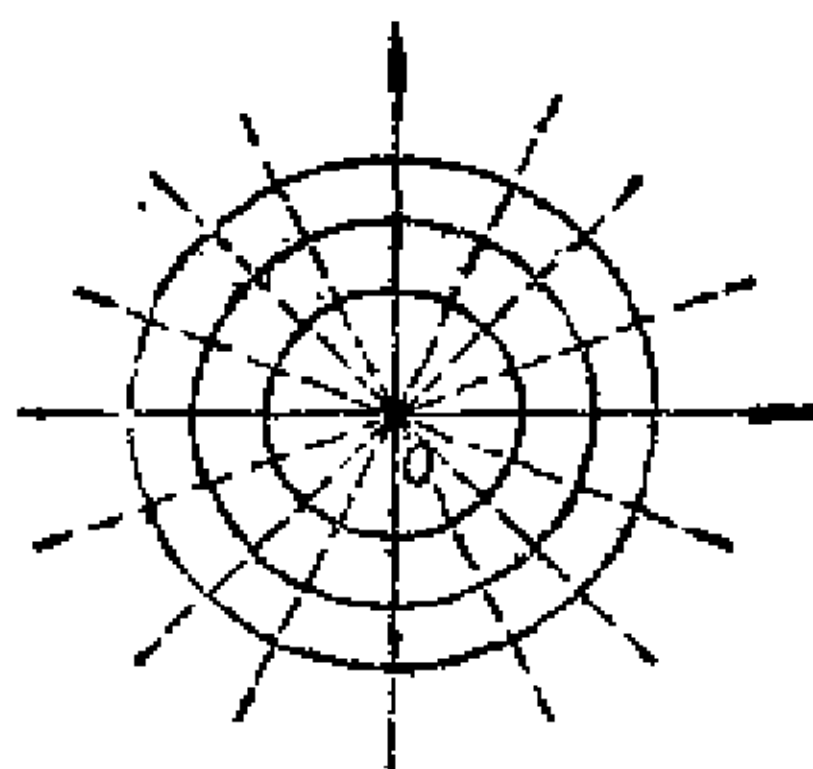


图 5.8

$-\pi + \theta$ 这两个值的点 w 才组成了过原点的一条直线 (图 5.7). 当 θ 取一切不同值的时候就得到了过原点的直线族——按我们的约定, 也可以称它们为过原点及 ∞ 的圆族 (图 5.8 的虚线部份). 因为变换 $w = (z, ab)$ 只能把圆周变成圆周, 把 $z = a$ 变成原点 $w = 0$, 把 $z = b$ 变成 $w = \infty$, 从而满足 $\arg(z, ab) = \theta$ 的点 z 描出过 a, b 两点的圆族 (图 5.9 的虚线部分).

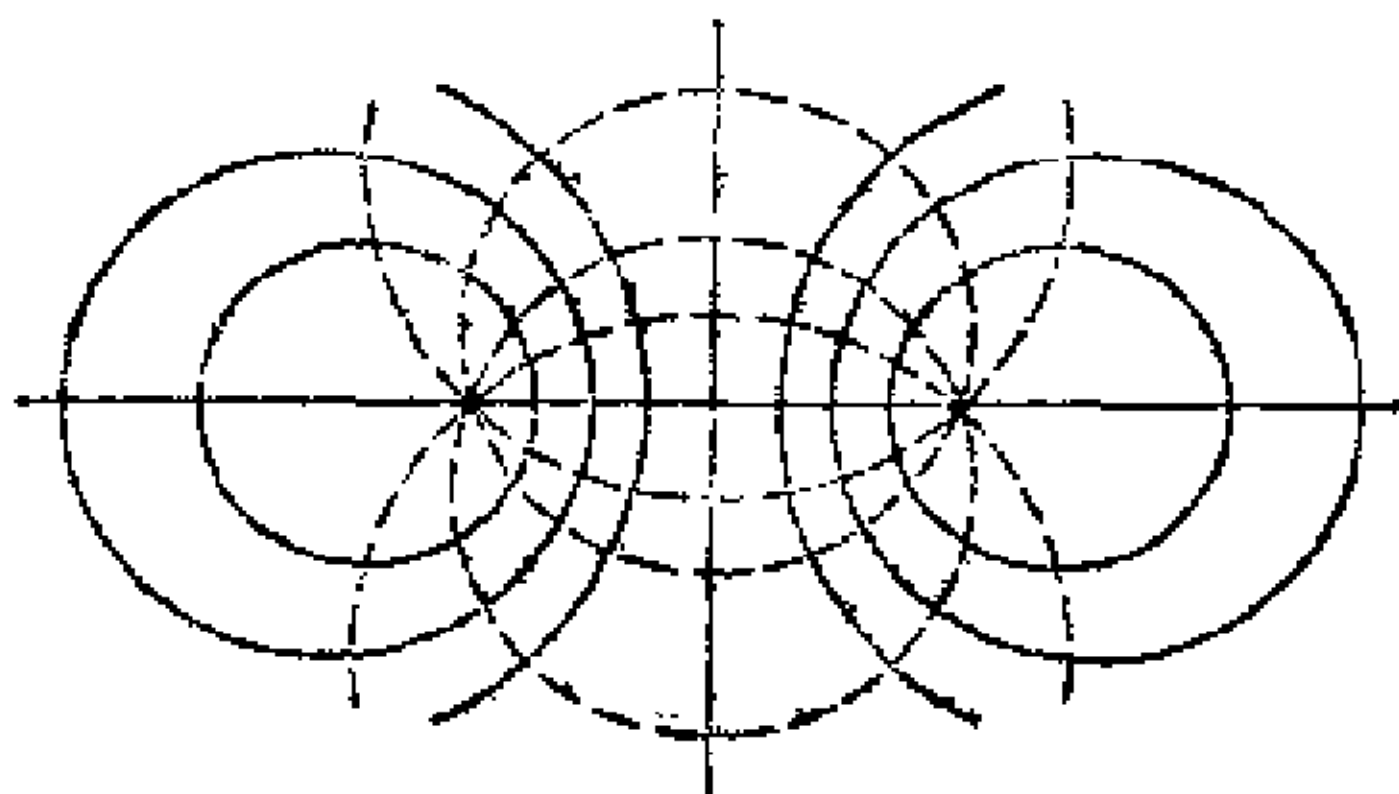


图 5.9

其次, 满足 $|(z, ab)| = \lambda$ 的点 z 的像 w 必满足 $|w| = \lambda$, 这种点 w 组成以原点为中心以 λ 为半径的圆周. 当 λ 取一切正值时, 就得到以原点为中心的同心圆族 (图 5.8 的实线部份). 这圆族中的每一成员都以 0 及 ∞ 为一对对称点, 从而 $|(z, ab)| = \lambda$ 也构成一个以 a, b 为一对对称点的圆族 (图 5.9 的实线部分).

从图 5.8 清楚地看出, 这两个圆族中的每一成员都是正交的, 从而 $\arg(z, ab) = \theta, |(z, ab)| = \lambda$ 的每一成员也必是正交的, 这就是这两个圆族相互间的几何联系. 这些结论虽然在第四节中已经得到过, 但大家看到在那里我们付出了多么

巨大的劳动!

最后来看看为了确定一个分式线性变换需要一些什么条件. 为此, 先要证明下列事实: 若 w_1, w_2, w_3 是三个不同的复数, 则任给一复数 u , 必可找到唯一的一个复数 w 使

$$(w, w_1, w_2, w_3) = u.$$

当 $u=0$ 时, 必须且只须 $w=w_2$, 故可设 $u \neq 0$. 因为 $(w, w_1, w_2, w_3) = \frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{(w, w_2w_3)}{(w_1, w_2w_3)}$, 故 $(w, w_1, w_2, w_3) = u$

相当于 $(w, w_2w_3) = (w_1, w_2w_3)u$, 令 $v = (w_1, w_2w_3)u$, 可见 $v \neq 0$. 设 $\lambda = |v|$, $\theta = \arg v$, 于是 $(w, w_2w_3) = v$ 相当于下列两个等式

$$|(w, w_2w_3)| = \lambda,$$

$$\arg(w, w_2w_3) = \theta,$$

w 必须且只须满足这两个条件. 由前面对圆族的详细讨论知这个 w 必定既在一个以 w_2, w_3 为对称点的圆周上, 又在一条以 w_2, w_3 两点为端点的圆弧上, 而这个圆周和这条圆弧有一个且只有一个交点, 这就是我们要求的点 w 了.

设 $z_1, z_2, z_3; w_1, w_2, w_3$ 是两组点, 考察等式

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3). \quad (6)$$

在右边随意给一复数 z , 则 $u = (z, z_1, z_2, z_3)$ 便是一个确定的复数, 由刚刚证过的事实, 必可找到唯一的一点 w 使 (6) 成立. 所以, (6) 可以看成是一个变换. 不难验算, 变换 (6) 把 z_1, z_2, z_3 三点分别变成 w_1, w_2, w_3 三点. 反过来, 如果有一个分式线性变换使 z, z_1, z_2, z_3 四点分别变成 w, w_1, w_2, w_3 四点,

則由定理六知(6)式成立, 这就证明了

定理十 任意給出兩組點 z_1, z_2, z_3 及 w_1, w_2, w_3 , 必存在唯一的分式綫性變換使 z_1, z_2, z_3 分別變成 w_1, w_2, w_3 . 这个唯一的變換可由等式

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3) \quad (6)$$

來表示.

最后舉幾個例子.

例 1 求出把上半平面變成單位圓內的分式綫性變換的一般表達形式.

解 首先, 此變換必須把實軸變成單位圓周, 其次上半平面中必有某一點 a 被變到在單位圓內的原點. 由於關於實軸與 a 對稱的點是 \bar{a} , 而關於單位圓與 0 對稱的是 ∞ , 故此變換還應將 \bar{a} 變到 ∞ , 因此這一變換可以寫成

$$w = k \frac{z - a}{z - \bar{a}}.$$

式中 k 為某一複數, 為了決定 k , 注意: $z=0$ 在實軸上, 故它的像必在單位圓上, 亦即用 $z=0$ 代入上式時, 應有 $|w|=1$, 亦即

$$\left| k \cdot \frac{0-a}{0-\bar{a}} \right| = |k| = 1.$$

由此可得 $k = e^{i\theta}$. 於是所求的變換必須具有形式

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}. \quad (7)$$

不論滿足 $I(a) > 0$ 的 a 及實數 θ 如何選取, (7) 總是把上

半平面变到单位圆内的一个分式线性变换.

例2 给出区域 D 由两圆 $|z-1|=\sqrt{2}$, $|z+1|=\sqrt{2}$ 所围成(图 5.10). 问在变换

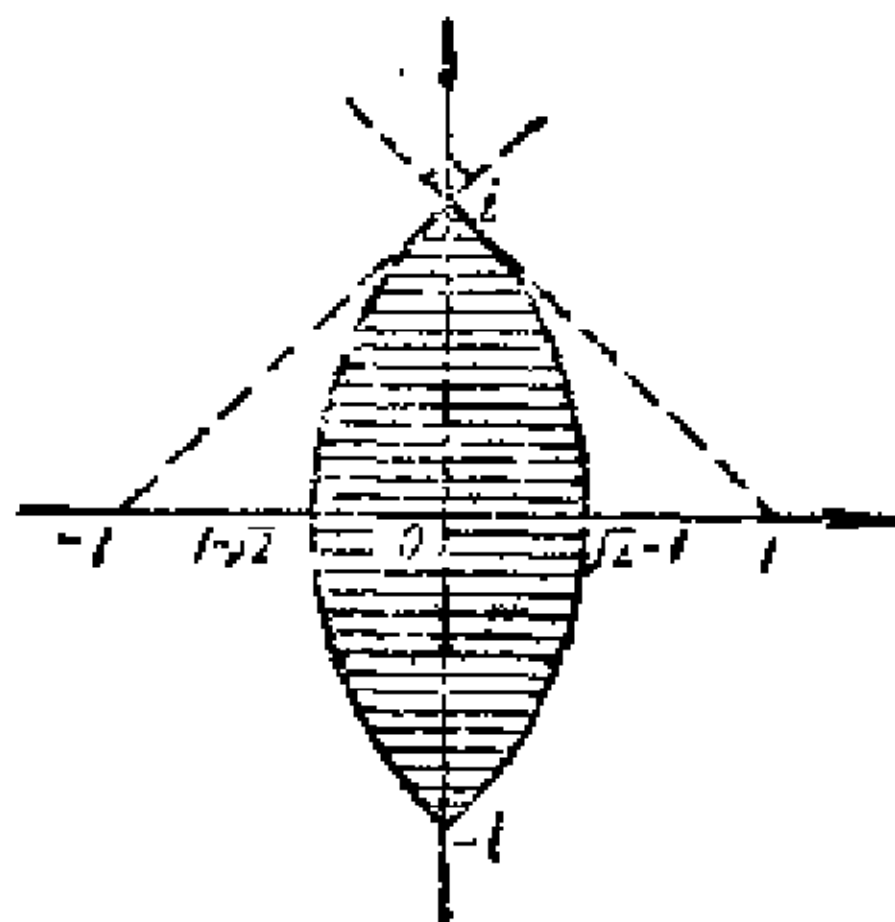


图 5.10

$$w = \frac{z-i}{z+i} \quad (8)$$

之下, D 变成了什么区域?

解 (8) 把 i 及 $-i$ 分别变成 0 及 ∞ , 由此可知 (8) 把相交于 i 及 $-i$ 两点的两条圆弧变成两条由原点出发的半射线. 又因此两圆弧在 i 点正交, 故得知两

半射线在原点互相垂直. 为了确定这两条半射线的位置, 令 $z=\sqrt{2}-1$ 及 $z=1-\sqrt{2}$ 代入 (8) 而分别算出

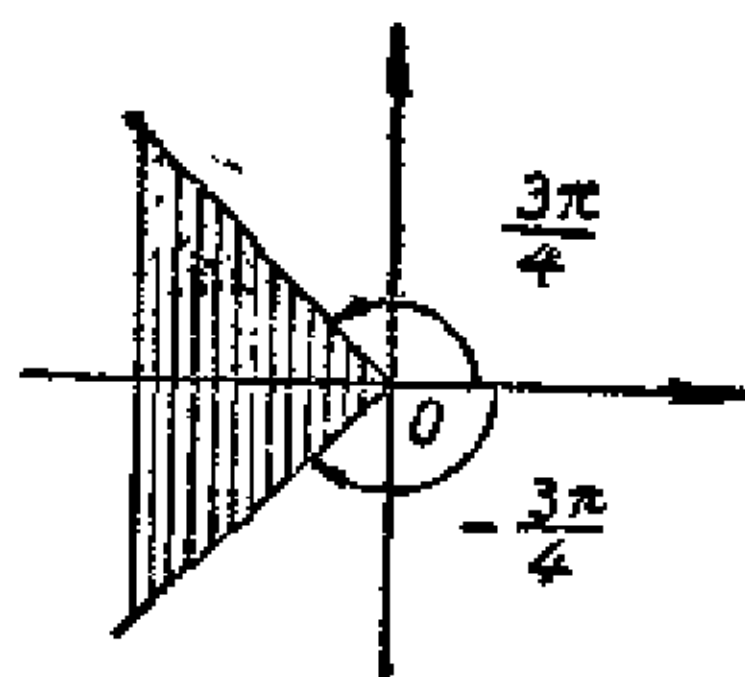


图 5.11

$$w = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}(-1-i),$$

$$w = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}(-1+i).$$

这两点分别在第三象限与第二象限的分角线上, 故左、右两条圆弧分别变成了第二象限、第三象限的分角线. 最后

为了确定 D 变成什么区域, 在 D 内取一点 $z=0$ 代入 (8) 得 $w=-1$, 这点在负实轴上, 从而最后确定了 (8) 把 D 变成如图 5.11 带阴影的区域.

第五节的习题

1. z 及 z' 为复平面上两点, 設它們移植到复球面上去分別得到 P 及 P' , 求证 $\triangle NPP' \sim \triangle Nz's$, 并由此导出公式

$$\|\overrightarrow{PP'}\| = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}$$

2. 設 z 与 z^* 是复平面上关于单位圆周的一对对称点, 它們与复球面上的 P 与 P^* 对应着. 求证 P 与 P^* 关于赤道平面对称.

3. 設复平面上两点 z 与 z' 分別对应着复球面上两点 P 与 P' , 求证 P 与 P' 是球的一条直径的两端点的必要充分条件是

$$z\bar{z}' = -1.$$

(参看前节习题 5 及本节习题 2)

4. 設平面上两圆 A, B 都交定圆 I 于直径的两端. 求证 A, B 必有两个交点, 而且过此两交点所作的任一圆 O , 亦必交 I 于直径的两端.

5. 求出一个把三点 $z_1=1, z_2=i, z_3=-1$ 分別变到三点 $w_1=-1, w_2=0, w_3=1$ 的分式线性变换, 問此变换把 $|z|>1$ 变成什么区域?

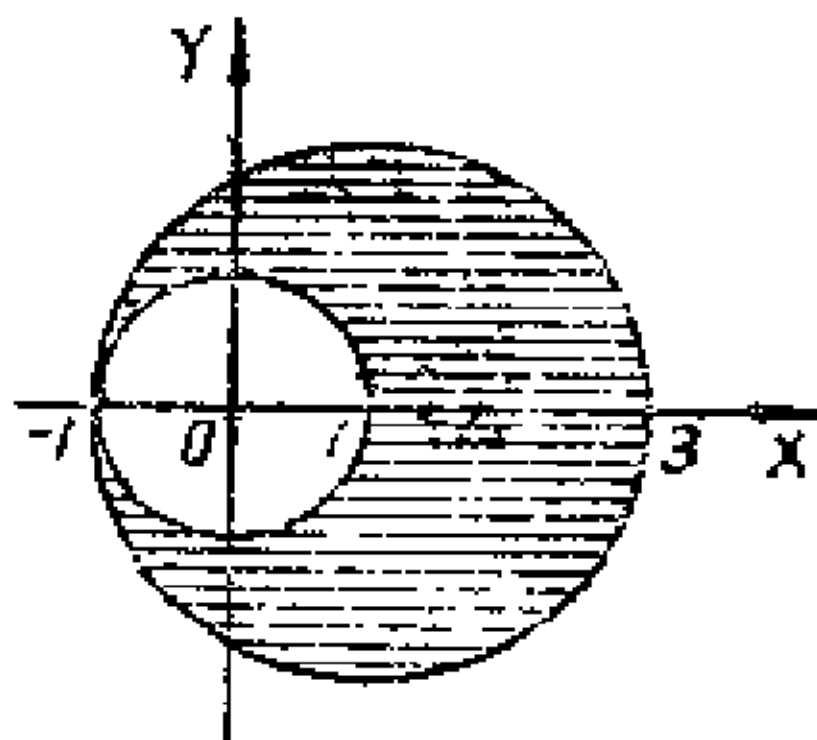
6. 問变换 $w=2\frac{z-1}{z+1}$ 把月牙形区域 $|z|>1, |z-1|<2$ (如下图),

变成了什么区域?

7. 求出把单位圆变成单位圆的分式线性变换的最一般的表达式.

8. 設 Γ 及 Γ' 为复平面上任何两个圆周, 求证总可以找到一个分式线性变换使 Γ 变成 Γ' .

9. 平面上有 $2n+3$ 个点, 其中无三点共线, 无四点共圆. 求证总可通过某三个点作一圆周, 使其余的 $2n$ 个点一半在圆内, 一半在圆外.



(第 6 题)

六 等速圆周运动

前面已经看到，利用复数可以很方便地讨论许多平面几何问题。在这一节里，我们将看到复数也可以用来讨论质点的平面运动问题。这里，我们只涉及高中物理书中讲到的质点的等速圆周运动。

设质点在一半径为 ρ 的圆周上作等速运动，角速度为 ω ，初始时刻的位置在正实轴上，于是经过时间 τ 之后，质点的位置是

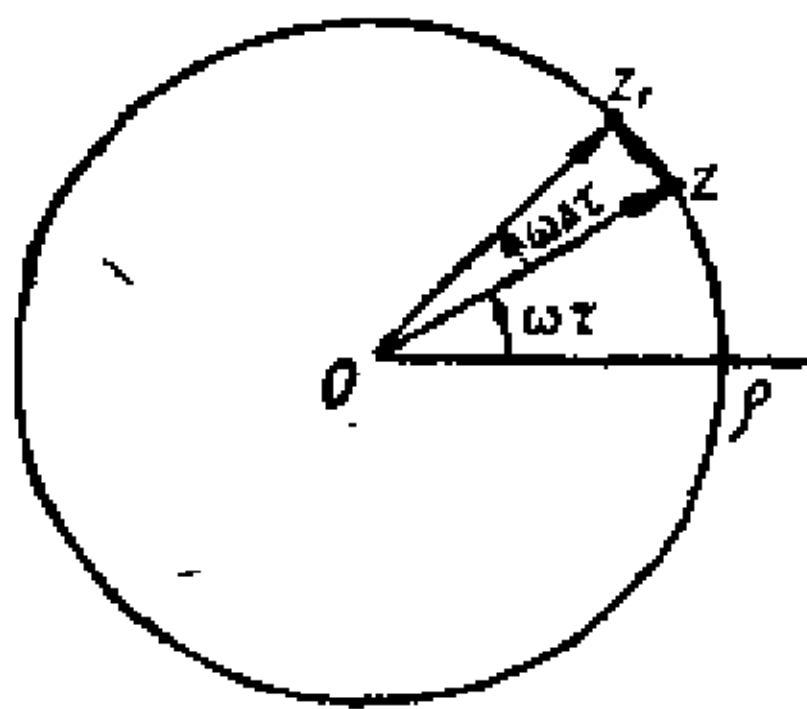


图 6.1

$$z = \rho e^{i\omega\tau}$$

(图 6.1). 现在我们来求此质点运动的速度与加速度。设想时间从 τ 过渡到 $\tau + \Delta\tau$ 后，质点由 z 走到了 $z_1 = \rho e^{i\omega(\tau + \Delta\tau)}$ ，在 $\Delta\tau$ 这段时间之内，质点的位置向量的

改变是 $\overrightarrow{zz_1}$ ，于是单位时间内质点的位置向量平均改变了

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{zz_1}}{\Delta\tau} &= \frac{1}{\Delta\tau}(z_1 - z) = \frac{1}{\Delta\tau}[\rho e^{i\omega(\tau + \Delta\tau)} - \rho e^{i\omega\tau}] \\ &= \rho e^{i\omega\tau} \frac{e^{i\omega\Delta\tau} - 1}{\Delta\tau}. \end{aligned} \quad (1)$$

这个向量就是质点在从 τ 到 $\tau + \Delta\tau$ 这段时间内的平均速度。不难想象，当 $\Delta\tau$ 愈小时，上述平均速度就愈接近质点在时刻 τ 的瞬时速度，因此为了得到瞬时速度的准确值，只须在 (1) 式右边让 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 而取其极限。由于 $\rho e^{i\omega\tau}$ 与 $\Delta\tau$ 无关，从

而只須算出

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{e^{i\omega \Delta \tau} - 1}{\Delta \tau}. \quad (2)$$

但是 $e^{i\omega \Delta \tau} - 1 = \cos \omega \Delta \tau - 1 + i \sin \omega \Delta \tau$, 为了算出(2)只須分別算出

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta \tau}{\Delta \tau}, \quad (3)$$

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\cos \omega \Delta \tau - 1}{\Delta \tau}. \quad (4)$$

我們先来证明一个重要的极限

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1. \quad (5)$$

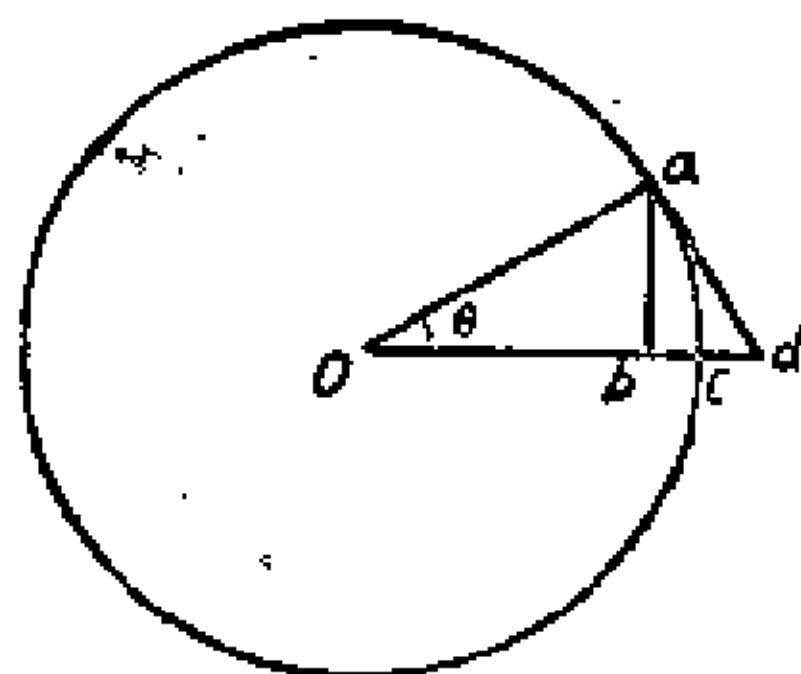


图 6.2

取一单位圆(图 6.2), 从图中看出

$$\begin{aligned} \|\vec{ab}\| &= \sin \theta, \quad \widehat{ac} = \theta, \quad \|\vec{ad}\| = \operatorname{tg} \theta, \\ \|\vec{ab}\| &< \widehat{ac} < \|\vec{ad}\|. \end{aligned}$$

由此可得

$$\sin \theta < \theta < \operatorname{tg} \theta,$$

亦即

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1.$$

因为当 $\theta \rightarrow 0$ 时有 $\cos \theta \rightarrow 1$, 从而夹在 $\cos \theta$ 与 1 当中的 $\frac{\sin \theta}{\theta}$ 也必 $\rightarrow 1$, 这就证明了(5)式.

利用(5)式很容易算出极限(3)、(4), 因为令 $\theta = \omega \Delta \tau$ 后便有

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta \tau}{\Delta \tau} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \omega \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} = \omega \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \omega.$$

再令 $\theta = \frac{\omega \Delta \tau}{2}$ 后便有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\cos \omega \Delta \tau - 1}{\Delta \tau} &= - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2\theta}{\theta} \cdot \frac{\omega}{2} \\ &= - \omega \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta} = - \omega \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \cdot \theta = - \omega \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

这样一来对于(2)有

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{e^{i\omega \Delta \tau} - 1}{\Delta \tau} = i\omega.$$

从而由(1)导出的瞬时速度

$$v = i\omega \rho e^{i\omega \tau} = i\omega z. \quad (6)$$

由(6)式知速度的大小为 $|v| = \omega|z| = \omega\rho$, 速度的方向为由向量 z 向反时针方向转一直角而得, 即速度沿圆周的切线方向.

正像速度 v 是位置 z 关于时间的改变率一样, 加速度 w 是速度 v 关于时间的改变率, 因此从 v 求 w 与由 z 求 v 的步骤完全类似, 故我们可以立刻写出

$$w = i\omega v = i\omega(i\omega z) = -\omega^2 z. \quad (7)$$

(7)式表明, 加速度的大小是 $|w| = \omega^2|z| = \omega^2\rho = \omega|v|$, 而加速度的方向与位置向量 z 的方向相反, 即沿着半径指向圆心的, 这个加速度称为向心加速度.

这就是高中的物理书中讨论等速圆周运动时所得出的主要结论.

习题解答与提示

第一节

2. $a + (b-a)e^{i\frac{\pi}{3}}$ 或 $a + (b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3. $a + (b-a)i, \quad b + (b-a)i$ 或

$a - (b-a)i, \quad b - (b-a)i$ 或

$a + \left(\frac{b-a}{\sqrt{2}}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}, a + \left(\frac{b-a}{\sqrt{2}}\right)e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

4. 如下图取坐标系, 并取正方形边长为单位长, 则:

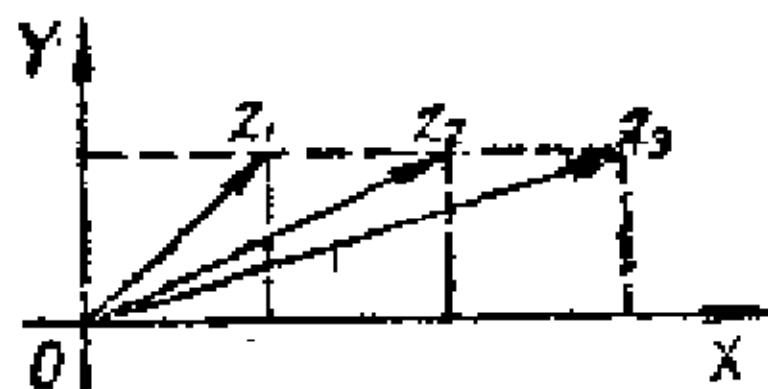
$$z_1 = 1+i, z_2 = 2+i, z_3 = 3+i,$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 10i,$$

故

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3$$

$$= \arg(z_1 z_2 z_3) = \arg(10i) = \frac{\pi}{2}.$$



(第4题)

5. 由 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 可导出 $z_3 = -(z_1 + z_2)$. 再取共轭复数, $\bar{z}_3 = -(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$. 将上二式相乘, 利用 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ 可得 $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = -1$. 于是 $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) = 1 + 1 - (-1) = 3$. 故 $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$.

所以 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}$.

6. 走 1 公里后, 到了 1 处; 走 2 公里后到了 $1 + e^{i\theta}$ 处, 走 3 公里后到了 $1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta}$ 处, ..., 走 N 公里后到达 $1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + \dots + e^{i(N-1)\theta} = \frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ 处. 故离开原点的距离为 $\frac{|1 - e^{iN\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|}$.

第二节

1. a 关于直线 $R(z) = I(z)$ 的对称点是

$$|a|e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)} = |a|e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\theta} = i\bar{a}.$$

2. (1) 因为 z 与 z' 垂直的必要充分条件是

$$z' = i\lambda z, \quad (\text{其中 } \lambda \text{ 为实数})$$

故 $z'\bar{z} = i\lambda z\bar{z} = i\lambda |z|^2.$

从而 $R(z'\bar{z}) = R(i\lambda |z|^2) = 0.$

(2) $|z+z'| = |z| + |z'|$ 成立当且只当

$$|z+z'|^2 = (|z| + |z'|)^2, \quad \text{亦即}$$

$$(z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = (|z| + |z'|)^2.$$

化简后得 $R(\bar{z}z') = |z||z'|.$

用 φ 记 z, z' 之间的夹角, 上式说明 $\cos \varphi = 1$. 这表明 $\varphi = 0$, 亦向量 z 与 z' 有相同的方向.

3. 把条件改写成

$$\begin{aligned} & (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + (z_4 - z_3)(\bar{z}_4 - \bar{z}_3) \\ & = (z_3 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + (z_1 - z_4)(\bar{z}_1 - \bar{z}_4), \end{aligned}$$

化简后得 $R[(z_1 - z_4)(\bar{z}_2 - \bar{z}_4)] = 0.$

再由第二题之 1, 立得结论.

4. 令 $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$, 则

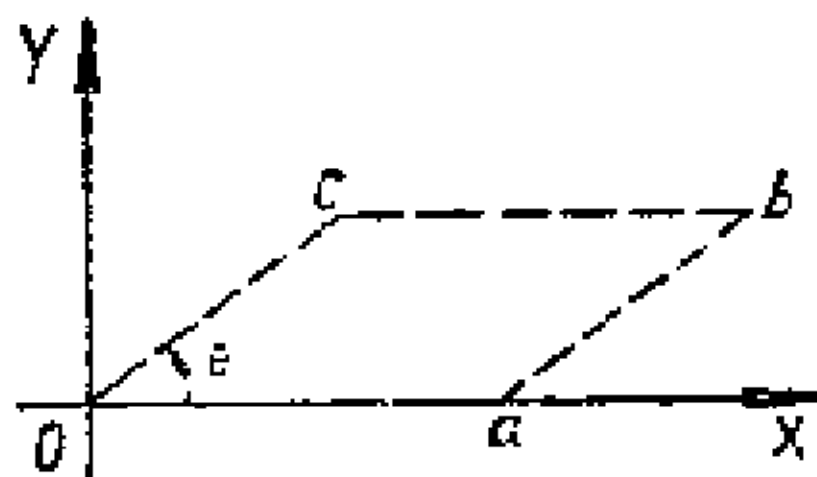
$$w_1 = z_3 + (z_2 - z_3)\omega, \quad w_2 = z_1 + (z_3 - z_1)\omega, \quad w_3 = z_2 + (z_1 - z_2)\omega.$$

直接计算可知

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_1 w_3$$

的必要充分条件是

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3.$$



(第 5 题)

5. 如左图选取坐标系.

设 $a = \alpha, \quad c = \beta e^{i\theta}$, 则

$$b = \alpha + \beta e^{i\theta}.$$

$$\|\vec{ac}\|^2 = |\alpha - \beta e^{i\theta}|^2.$$

$$\|\vec{ob}\|^2 = |\alpha + \beta e^{i\theta}|^2.$$

故

$$\begin{aligned} \|\vec{ac}\|^2 \|\vec{ob}\|^2 &= |\alpha^2 - \beta^2 e^{i2\theta}|^2 \\ &= (\alpha^2 - \beta^2 e^{i2\theta})(\alpha^2 - \beta^2 e^{-i2\theta}) \\ &= \alpha^4 + \beta^4 - \alpha^2 \beta^2 (e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) \end{aligned}$$

$$= \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 \cos 2\theta.$$

由題設條件可以推出 $\cos 2\theta = 0$, 故 $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

6. 因為 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, 故

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = z^4 + az^2 + b$$

其中 a, b 為兩個確定的復數(直接計算可知 z^3 與 z 的係數為 0). 由此方程可見, 在必要時可以改變標號而使 $z_1 = -z_3, z_2 = -z_4$.

第三節

1. $d = a + (c - b), m = \frac{a+b}{2}$, 令 $h' = a + \frac{1}{3}(c - a)$, 再證明 d, h', m 共線.

2. 用歸納法

3. 因 $|z_k - a|^2 = (z_k - a)(\bar{z}_k - \bar{a})$, 故 $\frac{1}{z_k - a} = \frac{\bar{z}_k - \bar{a}}{|z_k - a|^2}$.

令 $\mu_k = \frac{1}{|z_k - a|^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$, 則原式成為

$$(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)\bar{a} = \mu_1\bar{z}_1 + \mu_2\bar{z}_2 + \dots + \mu_n\bar{z}_n$$

亦

$$a = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \dots + \mu_n z_n}{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}.$$

參考第 2 題, 立知 a 必在此凸 n 邊形內

5. 容易驗證

$$(z_1, z_3, z_2, z_4) + (z_1, z_2, z_4, z_3) = 1.$$

由於 z_1, z_2, z_3, z_4 共圓, 故上述二交比都為實數; 並且因為它們是連續的四個頂點, 作圖可知, 它們都是非負實數, 從而上式可改寫成

$$|(z_1, z_3, z_2, z_4)| + |(z_1, z_2, z_4, z_3)| = 1.$$

這正是要證的等式.

6. (參考第二節第 4 題之解答)

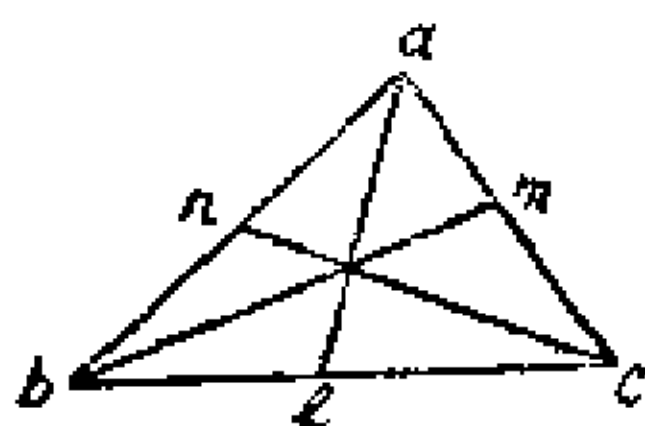
設 m_1, m_2, m_3 為這三個正三角形的重心, 則

$$m_1 = \frac{1}{3}(w_1 + z_2 + z_3), \quad m_2 = \frac{1}{3}(w_2 + z_3 + z_1), \quad m_3 = \frac{1}{3}(w_3 + z_1 + z_2),$$

然後再證明

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2.$$

7. 如下图, 由平面几何知



(第 7 题)

$$\frac{b-l}{c-l} = -\frac{\|\vec{ab}\|}{\|\vec{ac}\|}, \quad \frac{c-m}{a-m} = -\frac{\|\vec{bc}\|}{\|\vec{ba}\|},$$

$$\frac{a-n}{b-n} = -\frac{\|\vec{ca}\|}{\|\vec{cb}\|}.$$

于是: $\frac{b-l}{c-l} \cdot \frac{c-m}{a-m} \cdot \frac{a-n}{b-n} = -1.$

第四节

1. 中心在 $-\frac{1}{\sqrt{3}}i$, 半径为 $|1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

2. 中心在 $\frac{i-1}{2}$, 半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}.$

3. 第一个圆的中心为 $2i$, 半径为 2.

第二个圆的中心为 $3-i$, 半径为 2.

5. 依题设 $|z||z^*| = 1$ 且

$$\arg z = \arg z^*.$$

故

$$\begin{aligned} z^* &= |z^*| e^{i \arg z^*} = \frac{1}{|z|} e^{i \arg z} \\ &= \frac{|z|}{|z|^2} e^{i \arg z} = \frac{1}{|z|^2} z = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}. \end{aligned}$$

6. 依题设 $|z-a||z^*-a| = \rho^2$ 且

$$\arg(z-a) = \arg(z^*-a).$$

仿上题可推出

$$z^* - a = \frac{\rho^2}{\bar{z} - \bar{a}},$$

故

$$z^* = a + \frac{\rho^2}{\bar{z} - \bar{a}}.$$

第五节

4. 设定圆 Γ 为复平面上的单位圆, 以它为赤道平面作单位球 設